

Q. (基礎問題精講 2B P195 演習 127(2)(i))

解答で $n \geq 2$ のときと書いてある下段の Σ の式について、解説をお願いします。

A.

Σ の定義より $n \geq 1$ のとき

$$\sum_{k=1}^n ka_k = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1} + na_n \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成立します。また、同様にして $n \geq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1} ka_k = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が成立します。

よって $n \geq 2$ のとき、 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より

$$\sum_{k=1}^n ka_k - \sum_{k=1}^{n-1} ka_k = na_n \cdots \cdots \textcircled{3}$$

が成立することになります。

ここで、与えられた式より

$$\sum_{k=1}^n ka_k = n^2 a_n \cdots \cdots \textcircled{4}$$

が成立します。また、この式の n を $n-1$ に変えると

$$\sum_{k=1}^{n-1} ka_k = (n-1)^2 a_{n-1} \cdots \cdots \textcircled{5}$$

となりますので、 $\textcircled{4}\textcircled{5}$ を $\textcircled{3}$ に代入すると

$$n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1} = na_n$$

が得られます。あとはこの式を a_n について解けば、求める漸化式を得ることができます。