

Q. (標準問題精講 3 P60 例題 23(1))

$f(x)$ が $x=0$ で連続である証明がわかりません (はさみ打ちを使って $0 \leq |h \sin 1/h| \leq |h|$ となるのはわかりますが、その間になぜ $|f(h)-f(0)|=|f(h)|$ が入ってくるのでしょうか)。

A.

教科書等で関数の連続性は次のように定義されていると思います。

連続性の定義1 : $f(x)$ について、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在し、その値が $f(a)$ と一致するとき、
 $x = a$ で $f(x)$ は連続である。

上記の定義に従い、例題を解くと、 $f(0) = 0$ であり、はさみうちの原理より $\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = 0$ となるので、 $f(x)$ は $x = 0$ で連続となります。質問内容を確認する限り、上記のような解き方は理解できていると思われまますので、上記の方法で証明を書けば本設問では正解となります。

しかし、問題集の解説では上記のような連続性の定義ではなく、次のような定義を使用しているように思われます。

連続性の定義2 : $f(x)$ について $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - f(a)| = 0$ が成立するとき、
 $x = a$ で $f(x)$ は連続である。

この連続性の定義は、大学の数学で学習する $\epsilon - \delta$ 論法と呼ばれるものに近い定義となっております。何故そのような解法が高校数学の参考書で採用されているかは不明です。高校数学の範囲を考慮すると、質問内容でご指摘の通り、やや冗長な解法となっておりますので ($|f(h) - f(0)| = |f(h)|$ を書かなくても十分証明可能である)、このような解法は無視しても問題ないと思います。