Q. (標準問題精講 2B P294 演習 130-1(1))
解答で、$(n+1)^5-1^5=\sim$ の式がなぜ成り立つのかわかりません。

A.
$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^5-k^5\}=\sum_{k=1}^{n}(5k^4+10k^3+10k^2+5k+1)$ ……①
の式変形の仕方について解説致します。
まず、①の左辺のΣについて、$k=1$ からnまで具体的に足しあわせていくと、
$(\text{左辺})=(2^5-1^5)+(3^5-2^5)+\cdots+\{n^5-(n-1)^5\}+\{(n+1)^5-n^5\}$
となり、項どうしが打ち消し合って、次の２項だけが残ります。
$\therefore(\text{左辺})=(n+1)^5-1^5$ ……②
また、①の右辺のΣは、Σ記号の性質より、明らかに分配することが可能ですので、
$(\text{右辺})=5\sum_{k=1}^{n}k^4+10\sum_{k=1}^{n}k^3+10\sum_{k=1}^{n}k^2+5\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$ ……③
となります。③の最後の項はnですので、①を式変形すると②③より
$(n+1)^5-1^5=5\sum_{k=1}^{n}k^4+10\sum_{k=1}^{n}k^3+10\sum_{k=1}^{n}k^2+5\sum_{k=1}^{n}k+n$
となることが分かるのではないかと思います。