

Q. (標準問題精講 2B P109 例題(2))

解説で、③が①②の共通接線であるという証明の説明がよくわかりません。

A.

共通接線になることの証明を詳しく解説します。

まず、問題文より

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0 \dots\dots①$$

$$x^2 + y^2 - 14x - 4y + 52 = 0 \dots\dots②$$

となるので、①-②より

$$8x + 6y - 58 = 0$$

さらにこの式を2で割ると

$$4x + 3y - 29 = 0 \dots\dots③$$

となります。見ての通り、①-②を2で割ったものが③となりますので、数学的に厳密な表現ではありませんが各式の左辺に対して

$$\frac{\textcircled{1}-\textcircled{2}}{2} = \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}-\textcircled{2} = 2 \times \textcircled{3}$$

$$\therefore \textcircled{2} = \textcircled{1} - 2 \times \textcircled{3}$$

が成立することになります。以上のように、①-2×③が②になることは、③の導出過程から導かれます。また、この式が成り立つために、もし①③をともにみたす点が存在すれば、その点は②上にも存在することになります。念の為、具体的に文字を使って計算をすると以下のようになります

①と③が接点以外の共有点(s,t)をもつと仮定すると、(s,t)は①③上にあるので

$$s^2 + t^2 - 6s + 2t - 6 = 0 \dots\dots④$$

$$4s + 3t - 29 = 0 \dots\dots⑤$$

がともに成立します。

④-2×⑤を計算すると

$$s^2 + t^2 - 14s - 4t + 52 = 0$$

となりますので、点(s, t)は②を満たしており、(s, t)は円②上にも存在することになります。よって、円①②は、接点以外に(s, t)でも共有点をもつことになり、共有点が2つ存在することになりますが、これは円が外接しているという条件に矛盾するので、仮定は誤りとなります。よって①と③が接点以外の共有点をもたないことになり、接するということが結論されます。