

Q. (基礎問題精講 2B P104 例題 63)

解答の 2 行目までは求められましたが、その先進め方がよく分かりません。

A.

$$\cos 2\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

の解き方について解説致します。

まず、 $\textcircled{1}$ で出てくる角度がどの象限にあるかを調べます。

$$0 \leq \beta \leq \pi$$

より、各辺に2をかけると

$$0 \leq 2\beta \leq 2\pi$$

となりますので、 $2\beta$ は第1象限から第4象限までのどこにでも存在できることが分かります。次に

$$0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$$

より、各辺に $-1$ をかけると不等号の向きが逆転し、

$$-\frac{\pi}{2} < -\alpha \leq 0$$

となります。さらに各辺に $\frac{\pi}{2}$ を加えると

$$0 < \frac{\pi}{2} - \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

となりますので、 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ は第1象限の角であることが分かります。

$\textcircled{1}$ は、単位円上で $2\beta$ の位置と $\frac{\pi}{2} - \alpha$ の位置の $x$ 座標が等しいことを表していますので、可能性として、 $2\beta$ が第1象限にある場合と第4象限にある場合の2つの異なる場合が考えられます。

$2\beta$ が第1象限にある場合、

$$2\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\therefore \beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となり、 $2\beta$ が第4象限にある場合、

$$2\beta = 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$2\beta = \frac{3\pi}{2} + \alpha$$

$$\therefore \beta = \frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

となることが分かります。よって、 $\textcircled{2}\textcircled{3}$ が求める式となります。