苦手分野対策プリント（数2B　数学的帰納法_不等式の証明）

▼苦手分野対策プリントの2つの目的

１）出題されうる全てのパターンを網羅し、全体観をつかむ（安心する）
受験とは、言い換えると「出題されうるパターンをできるだけ多く習得した人が合格する試験」です。そこで、このプリントではまず、出題されうるパターンをすべて整理し、全体観を掴みます。これだけ頭に入れたらいいんだ、という安心にもつながるでしょう。

２）その手の問題が出題された時に使う、一般的な考え方を習得する（本質をつかむ）
本質がつかめなければ苦手分野から脱却することはできません。本質とは、類題やちょっとひねった問題が出題されても対応できるようになる、その手の問題が出題された時に持っておくべき一般的な考え方のこと。そこで、洗い出した全出題パターンに対し、「この手の問題は、一般に、こう考える」を明記しました。これをきちんと理解することが重要です。

それでは、本題に入りましょう。

＊＊＊

１）数学的帰納法を用いて不等式を証明する問題の、もっとも大事な考え

この手の問題は、「**n=kの不等式」を変形して「n=k+1の不等式」の形を導く、**が大方針です。
具体的には、以下の2ステップを踏みます。

a.「n=kの不等式」と「n=k+1の不等式」の左辺が同じになるように、「n=kの不等式」の両辺に操作をする。

b.「aの不等式」から「n=k+1の不等式」を導くために、新しい不等式を証明する。　※ココがつまずくポイントですが、乗り切りましょう。

＊＊＊

では、具体的に見ていきましょう。まずは、基礎問題精講137(2)です。

137 数学的帰納法（Ⅱ）

n が自然数のとき，次の各式が成立することを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(2)　$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\geqq\dfrac{2n}{n+1}$　……②

まさに"数学的帰納法を用いて不等式の証明をする問題"ですね。

この手の問題が出題された時はまず、大方針である「**n=kの不等式」を変形して「n=k+1の不等式」の形を導く**を思い出しましょう。続いて、具体的な手順a, bに沿って問題を解いていきます。

a.「n=kの不等式」と「n=k+1の不等式」の左辺*が同じになるように、「n=kの不等式」の両辺に操作をする（足したり、かけたり・・・）。

「n=kの不等式」というのは、次の式のことですね。

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k} \geqq \frac{2k}{k+1} \quad \cdots\cdots ②'$$

一方、「n=k+1の不等式」というのは、次の式のことです。

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k+1} \geqq \frac{2(k+1)}{k+2}$$

さて、この2つの式を見比べて、左辺が同じになるように、「n=kの不等式」をいじるにはどうしたらよいでしょうか？　それは、両辺に、1/k+1を代入したらいいですね。すると、次のようになります。

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1} \geqq \frac{2k+1}{k+1}$$

こうして得られた不等式は、残念ながら、最終的に求めたい不等式とは異なります。念のための確認ですが、最終的に示したい不等式は

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k+1} \geqq \frac{2(k+1)}{k+2}$$

ですが、得られた不等式は、

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1} \geqq \frac{2k+1}{k+1}$$

なのです。ここで、ステップbの登場です。

b.「aの不等式」から「n=k+1の不等式」を導くために、新しい不等式を証明する。

確認ですが、今使える不等式は、

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\geqq\frac{2k+1}{k+1}$$

で、ここから最終的に導きたい不等式が

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k+1}\geqq\frac{2(k+1)}{k+2}$$

であるので、結局、

$$\frac{2k+1}{k+1}\geqq\frac{2(k+1)}{k+2}$$

が証明できれば、

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\geqq\frac{2k+1}{k+1}\geqq\frac{2(k+1)}{k+2}$$

が証明され、最終的に導きたい不等式である

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k+1}\geqq\frac{2(k+1)}{k+2}$$

が導かれる、ということなのです。

（たとえ話にすると、最終的に証明したいのは「AさんよりBさんの方が背が低い（A>B）」なのですが、今知っている情報は「AさんよりCさんの方が背が低い（A>C）」です。ということは、「CさんよりBさんが背が低い（C>B）」さえ証明できれば、A>C>Bという関係があること、すなわちA>Bであることが証明できる、というのと全く同じ流れです）

わかりましたでしょうか？

解答の以下の箇所で、「b.「aの不等式」から「n=k+1の不等式」を導くために、新しい不等式を証明する」が行われていますよ。

ここで，

$$\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{k+2}=\frac{k}{(k+1)(k+2)}>0$$

◀ここがポイント

では、もう一度、a, bの手順を踏まえた上で、解説を読んでみましょう。

a. 「n=kの不等式」と「n=k+1の不等式」の左辺*が同じになるように、「n=kの不等式」の両辺に操作をする（足したり、かけたり・・・）。

b. 「aの不等式」から「n=k+1の不等式」を導くために、新しい不等式を証明する。

(2)　i）$n=1$ のとき

左辺$=1$，右辺$=\frac{2\cdot 1}{1+1}=1$ となり，$n=1$ のとき②は成立する．

ii）$n=k$ のとき，②が成立すると仮定すると

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\geqq\frac{2k}{k+1}\quad\cdots\cdots②'$$

②′ の両辺に $\frac{1}{k+1}$ を加えると

◀左辺を証明したい式にする

$$左辺=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}$$

$$右辺=\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}=\frac{2k+1}{k+1}$$

ここで，

$$\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{k+2}=\frac{k}{(k+1)(k+2)}>0$$

◀ここがポイント

$$\therefore\quad 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k+1}\geqq\frac{2k+1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{k+2}$$

すなわち，

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k+1}\geqq\frac{2(k+1)}{k+2}$$

これは，②に $n=k+1$ を代入したものである．

よって，$n=k+1$ でも②は成立する．

i），ii）より，すべての自然数 n について②は成立する．

ちなみに、標準問題精講146(1)は全く同じ問題です。同じように解いていることを確認しましょう。

146　数学的帰納法 (1)

(1)　任意の自然数 n に対して

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\geqq\frac{2n}{n+1}$$

が成り立つことを数学的帰納法によって証明せよ．　（愛知学院大）

〈　解　答　〉

(1)　(I)　$n=1$ のとき，(左辺)$=1$，(右辺)$=\frac{2}{1+1}=1$　となり，成立する．

(II)　$n=k$ での成立を仮定すると

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)-\frac{2(k+1)}{k+2}$$

$$\geqq\left(\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}\right)-\frac{2(k+1)}{k+2}\quad(\because\ 帰納法の仮定)$$

$$=\frac{(2k+1)(k+2)-2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{(k+1)(k+2)}>0$$

$n=k+1$ のときも成立する．

(I)，(II)より，任意の自然数 n に対して与えられた不等式は成立する．

＜類題紹介＞

この問題も、全く同じ方法で解くことができます。手を動かす必要はないので、a, bの方法で解いていることを確認しましょう。

Check 例題 300 **数学的帰納法(2)・不等式の証明** ＊＊

n が 2 以上の自然数のとき，$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$ が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ．

考え方▶ 2 以上の自然数について成り立つことを示すので，次のことを証明すればよい．
(I) $n=2$ のとき，不等式が成り立つことを示す．
(II) $n=k$ $(k\geqq 2)$ のとき，不等式が成り立つと仮定し，これを用いて，$n=k+1$ のときも成り立つことを示す．

解 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$ ……① とおく．

(I) $n=2$ のとき，

$$(\text{左辺})=1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4},\ (\text{右辺})=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

より，(左辺)<(右辺) となり，$n=2$ のとき①は成り立つ．

(II) $n=k$ $(k\geqq 2)$ のとき①が成り立つと仮定すると，　◀ k は 2 以上の自然数

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k} \quad \cdots\cdots(*)$$

$n=k+1$ のとき，

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$$

が成り立つことを示せばよい．　◀ 何を示すかを明記する．

(右辺)−(左辺)

$$=2-\frac{1}{k+1}-\left\{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}$$

◀ (右辺)−(左辺)>0 を示せばよい．

$$>2-\frac{1}{k+1}-\left\{2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}$$

◀ (*)の仮定を利用するが，不等号の向きに注意する．
●<▲ ならば，
−●>−▲

$$=\frac{1}{k(k+1)^2}>0$$

したがって，(右辺)−(左辺)>0 となり，$n=k+1$ のときも成り立つ．

◀ k は 2 以上の自然数だから，$k(k+1)^2>0$
よって，$\frac{1}{k(k+1)^2}>0$

(I), (II)より，2 以上のすべての自然数 n について，①は成り立つ．

Focus

数学的帰納法の証明
⟹ 何が仮定で（スタート），何を示すべきか（ゴール）を明確に

注 例題 300 や練習 300 のように，$n=1$ から始まらず，最初の数が $n=2$ や $n=4$ などとなる場合もある．

▼まとめ

・数学的帰納法を用いて不等式を証明する問題の、もっとも大事な考え

この手の問題は、**「n=kの不等式」を変形して「n=k+1の不等式」の形を導く、**が大方針です。
具体的には、以下の2ステップを踏みます。

a. 「n=kの不等式」と「n=k+1の不等式」の左辺*が同じになるように、「n=kの不等式」の両辺に操作をする（足したり、かけたり・・・）。　*もちろん、右辺の場合もありますが・・・

b. 「aの不等式」から「n=k+1の不等式」を導くために、新しい不等式を証明する。　※ココがつまずくポイントですが、乗り切りましょう。