

標問 12 支点の動く振り子の運動

解答・解説 p. 39

振り子運動の重心

物理

図1に示すように、質量 M_B の台車Bが水平に取り付けられたレールに沿って摩擦なしに移動できるようにになっている。台車Bの重心の位置Pを支点として棒が取り付けられており、その棒の先に質量 M_A ($M_A < M_B$) の小さいおもりAがついている。支点PからおもりAまでの長さは R である。棒は支点Pを中心になめらかに回転するようになっており、おもりAの大きさおよび棒の質量は無視できるものとする。 x 座標は図に示すようにとるものとする。初期状態では、図1に示すように台車Bの重心の位置は $x=0$ にあり、棒は水平に支えられ、おもりも台車も静止しているものとする。このとき、重力加速度を g として、以下の問いに答えよ。また、解答は特にことわらない限り M_A , M_B , g , R および以下の問いにでてくる M_C の中から必要なものを用いて表せ。

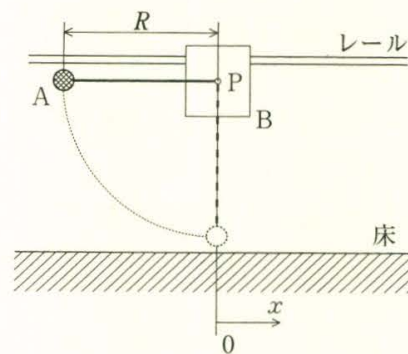


図 1

I まず台車Bを水平方向に動かないようにして、おもりの支えを解放した。

問1 おもりAが最下点に達したとき、おもりAの速度の x 成分 V_0 を求めよ。

II 次に、台車Bを水平方向に自由に動けるようにして、上記と同じ初期状態からおもりの支えを解放した。今度はおもりAが落下すると同時に台車Bも水平方向に運動を始める。図2を参考にして以下の問いに答えよ。

問2 おもりAが最下点Qに達したとき、おもりAの速度の x 成分 V_1 と台車Bの速度の x 成分 V_2 を求めよ。

★ 問3 おもりAと台車Bを1つの物体とみなすと、この物体には水平方向の外力が働いていないので、両者の運動にもかかわらず、その重心の位置は水平方向には変化しない。このことを用いて、おもりAが最下点に達する点Qの x 座標を求めよ。

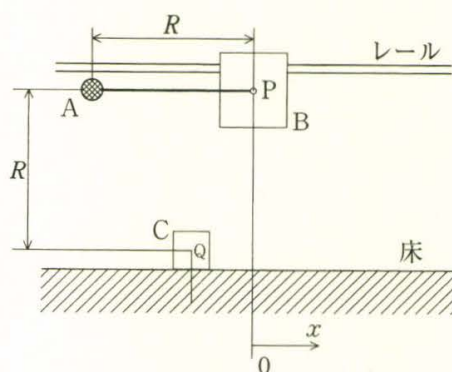


図 2

III 問3で求めた水平な床上の点Qに、図2に示すように質量 M_C の小さい物体Cを置いておもりAと衝突させる。ただし、物体Cは質点とみなせるものとし、おもりAと物体Cは完全弾性衝突をするものとする。

問4 衝突直後のおもりA、台車B、物体Cの速度の x 成分をそれぞれ V_3 , V_4 , V_5 と

する。おもり A, 台車 B および物体 C を 1 つの物体とみなすとき, この物体には水平方向には外力が働いていない。このことを使って, この物体に関する運動量保存則とエネルギー保存則を $M_A, M_B, M_C, g, R, V_3, V_4$ および V_5 を用いて表せ。ただし, おもり A と床との間や物体 C と床との間に摩擦はないものとする。

問 5 衝突直後に $V_3=0$ となった。このときの物体 C の質量 M_C を求めよ。

IV $V_3=0$ となっても台車 B の運動のために, おもり A はこの後台車 B に対して振り子のように揺れる運動を続ける。この運動によっておもり A が到達する高さを求める。

問 6 おもり A が最高点に達するとき, おもり A と台車 B の速度の x 成分は等しくなる。そのときのおもり A の速度の x 成分 V_6 を求めよ。

問 7 おもり A と物体 C の衝突直後, また, おもり A が最高点に達するとき, これら 2 つの瞬間のおもり A と台車 B の運動エネルギーの和をそれぞれ E_1, E_2 とする。このとき $\Delta E = E_2 - E_1$ を求めよ。

問 8 問 7 の結果を用いて, おもり A が到達する高さ h を求めよ。ただし, h は最下点 Q より測るものとする。

走行中の電車の中で電車の加速度を測定するために、図1に示すように、質量 m のおもり、質量 M の枠、質量の無視できるばね定数 k のばねからなる加速度計を、電車の床に固定した。ばねの一端はおもりに固定され、他端は枠の内側に固定されており、

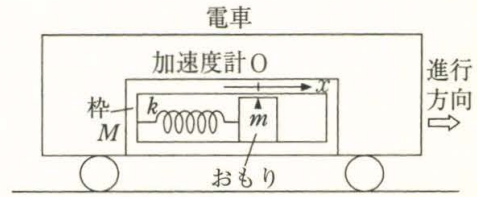


図 1

おもりは枠の中で直線運動するようになっている。枠に固定された座標系を考え、この座標系におけるおもりの位置を x とする。ばねが自然の長さのときのおもりの位置を $x=0$ とし、ばねが伸びる向きを x 軸の正の向きとする。また、 x 軸の正の向きは、電車の進行方向と一致しているとする。枠とおもりの間の摩擦は無視でき、おもりが枠の端に接触したり、ばねが縮みきったりすることはないものとして、以下の問いに答えよ。ただし、重力加速度の大きさを g とし、電車の加速度の向きは、電車の進行方向を正として、正負の符号により表すものとする。

I 電車が水平でまっすぐなレールの上を走っている場合を考える。

問1 電車が一定の加速度で走っているとき、おもりは枠に対して単振動した。振動の中心の x 座標を x_0 とするとき、電車の加速度を m , k , x_0 を用いて表せ。

- ★ 問2 電車の中で時刻 t とおもりの位置 x の関係を測定したところ、図2のようになった。ただし、 $t=0$ では電車とおもりはともに静止しており、 $t=0\sim t_1$, $t_1\sim t_2$, $t_2\sim t_3$ の間は、それぞれおもりが枠に対して単振動したとする。単振動の振幅は、 $t=0\sim t_1$, $t_2\sim t_3$ の間が l , $t=t_1\sim t_2$ の間が $2l$ である。

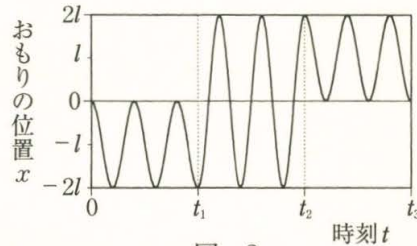


図 2

このとき、時刻 t と電車の速さ u の関係をグラフで表せ。また、 $t=0$ から t_3 までの間に電車が移動した距離を、 t_1 , t_2 , t_3 を用いずに表せ。

- ★ 問3 問2において、時刻 $t=0\sim t_1$ の間に電車が加速度計に対してした仕事を、 t_1 , t_2 , t_3 を用いずに表せ。

問4 問2において、時刻 $t=0\sim t_3$ の間、加速度計を床に固定しなくても加速度計がすべり出さないための条件を求めよ。ただし、床と加速度計の間の静止摩擦係数 μ は、おもりの位置によらず一定であるとする。

II 図3に示すように、電車が傾斜角 θ の斜面上で停止し、おもりがつり合いの位置で静止している状態から、時刻 $t=0$ 以降において、電車が一定の加速度 a で斜面を登る場合を考える。

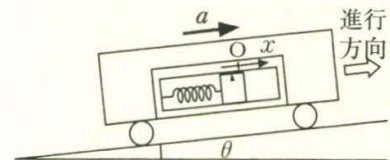


図 3

- ★★ 問5 時刻 t とおもりの位置 x の関係を、グラフおよび数式で表せ。

問6 時刻 $t=t_4$ で、電車の運動は等速直線運動に変わった。 $t>t_4$ において、おもりが枠に対して静止し続けるための t_4 の条件を求めよ。

図1はヤングの干渉実験を示したものである。電球VはフィルターFで囲まれていて、赤い光(波長 λ)だけを透過するようにしてある。電球Vから出た光はスクリーンA上のスリット S_0 、およびスクリーンB上の複スリット S_1 、

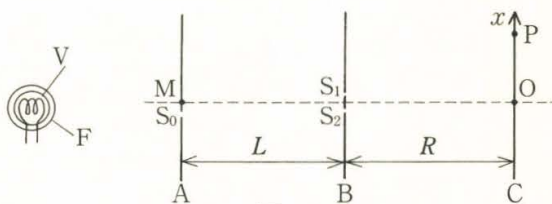


図 1

S_2 を通って、スクリーンC上に干渉縞をつくる。スクリーンA, B, Cは互いに平行で、AB間の距離は L 、BC間の距離は R である。 S_1 と S_2 のスリット間距離は d とし、 S_1S_2 の垂直二等分線がスクリーンAと交わる点をM、スクリーンCと交わる点をOとする。また、スクリーンC上の座標軸 x を、Oを原点として図1のようにとる。このとき以下の問いに答えよ。必要に応じて、整数を表す記号として m, n を用いてよい。

問1 スリット S_0 がMの位置にある場合を考える。干渉縞の明線および暗線が現れる x 座標の値をそれぞれ示せ。ただし、スクリーン上の点をPとすると、 S_1 とPとの距離を $\overline{S_1P}$ などと表すと、 $(\overline{S_1P} - \overline{S_2P})(\overline{S_1P} + \overline{S_2P}) = \overline{S_1P}^2 - \overline{S_2P}^2$ が成り立つことを利用し、 \overline{OP} 、 d が R と比べて十分に小さいとして、 $\overline{S_1P} + \overline{S_2P} \doteq 2R$ としてよい。

問2 スクリーンAを取り除くと、スクリーンC上の干渉縞は消失した。その理由を簡潔に述べよ。

問3 スクリーンA上のスリット S_0 を、Mから下向きに h だけわずかにずらした。このとき、スクリーンC上で干渉縞の明線が現れる x 座標の値を求めよ。ただし、 h は L に比べて十分に小さいとする。

★問4 問3の状態のとき、スクリーンC上に現れる干渉縞の明線の位置は図2(a)のようであった。この結果から S_0 の位置 h を測定したい。ところが図2(a)だけからでは、

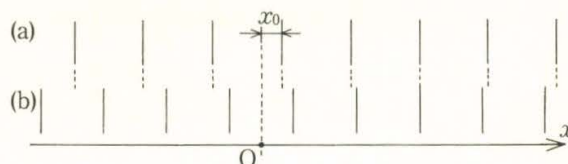


図 2

どの干渉縞の明線がどのような干渉によって生じているかがわからない。そこで、フィルターFを交換して、緑の光(波長 λ')だけを透過するようにした。そのとき、スクリーンC上に現れる干渉縞の明線の位置は図2(b)のようになった。図2(a)で、 x 軸方向で原点に最も近い明線の位置を x_0 とすると、 h を x_0 を用いて表せ。

★問5 問3の状態ですクリーンA上にもう1つのスリット S_0' を開ける。 S_0' の位置は S_1S_2 の垂直二等分線に対して S_0 と対称な位置とする。このとき、スクリーンC上の干渉縞の明暗が最も明瞭となるときの h の値を求めよ。

図1は、真空中で金属単結晶試料に10～100eV程度のエネルギーをもつ電子線を照射して、試料から反射される電子または放射される光を測定する実験装置である。装置には、試料に対して一定のエネルギーをもった電子線を照射する電子銃、反射された電子を検出する電子検出器、および放射された光の強さと波長を測定する分光器が取り付けられている。

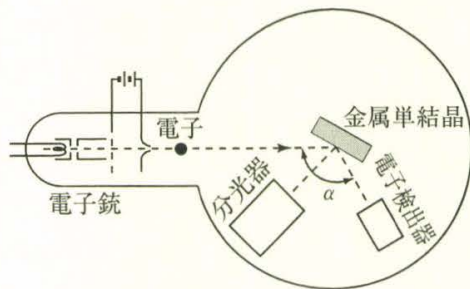


図 1

金属単結晶試料は任意の方向に回転できる。プランク定数を h 、真空中の光速を c 、電子の質量を m 、電気素量を $e (e > 0)$ とする。

I 図2に示すように、金属単結晶では原子は規則正しく配列し、その原子面間隔が d であるとする。この原子面に対して、角度 θ で入射した電子線の回折を考える。

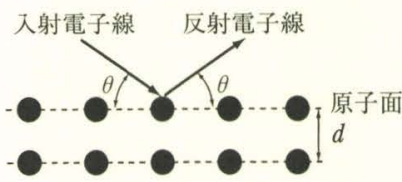


図 2

問1 入射した電子線を波と考え、その波長を λ

とする。エネルギーを失わずに、図2のように反射した電子線が干渉して強め合う条件を、 $\lambda, h, c, m, e, \theta, d, n$ (正の整数) の中から必要なものを用いて表せ。ただし、電子線が金属単結晶中に入るときに受ける屈折の効果は無視せよ。

問2 運動エネルギー E をもつ電子の波長 λ を、 E, h, c, m, e の中から必要なものを用いて表せ。

問3 図1の実験装置で、電子銃から試料に対して電圧 V_1 で加速した電子線を照射したところ、電子線と電子検出器のなす角度が α のとき、強い電子線の反射が観測された。この電子線の回折に関与している最も小さな原子面間隔を d_α とすると、 d_α を V_1, h, c, m, e, α の中から必要なものを用いて表せ。

★問4 問3で、 $\alpha = 120^\circ, d_\alpha = 0.22$ [nm] の場合の入射電子の運動エネルギー E_e を、eV 単位で具体的に求めよ。プランク定数 $h = 6.6 \times 10^{-34}$ [J·s]、光速 $c = 3.0 \times 10^8$ [m/s]、電子の質量 $m = 9.1 \times 10^{-31}$ [kg]、電気素量 $e = 1.6 \times 10^{-19}$ [C] として、有効数字2桁で答えよ。1 [nm] = 1×10^{-9} [m] である。

★問5 問3と同様な回折現象は、電子線の代わりにX線を用いても観測できる。問4の回折条件 ($\alpha = 120^\circ, d_\alpha = 0.22$ [nm]) を満たすX線のエネルギー E_p を、eV 単位で有効数字2桁まで求めよ。必要ならば問4で与えた定数を用いること。

II 次に、問3の実験条件のまま、分光器のスイッチを入れて試料からの発光を調べたところ、図3に示すような連続的なスペクトルが観測され、その最短波長は λ_1 であった。縦軸の発光強度は、一定時間あたり検出される光子の数である。この発光現象を光電効果の逆過程と考え、以下の問いに答えよ。

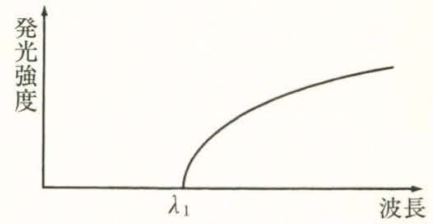


図 3

★問6 同じ加速電圧を保ちながら、一定時間あたり電子銃から照射される電子の数を2倍にした。このときの発光の強度と波長の関係を、図4に実線(—)で描き込め。発光の最短波長 λ_1^* を図中に示すこと。次に、電子銃からの電子の数を元に戻し、加速電圧を V_1 より大きな V_2 に変えた場合、検出された発光の最短波長は λ_2 であった。このときの発光の強度と波長の関係を、図4に破線(……)で描き込め。 λ_2 の大まかな位置も示すこと。また、解答にあたって留意したことを図中に描き込むこと。

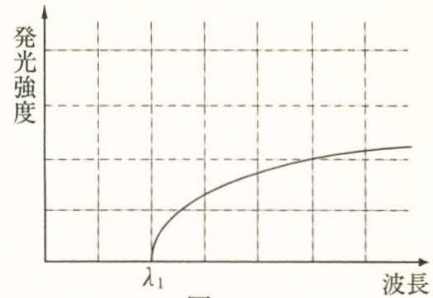


図 4

問7 この金属の仕事関数 W およびプランク定数 h を、 V_1 、 V_2 、 λ_1 、 λ_2 、 c 、 e の中から必要なものを用いて表せ。