北里大学入試問題

2015 年数学

解答・解説編

①小問集合

○原則

(1) ◆方程式とグラフ

方程式 $f(x)=g(x)$ の解の個数は、曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ との共有点の個数と一致する。

とくに、方程式 $f(x)=a$ $(a：定数)$ の解の個数は、曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=a$ との共有点の個数と一致する。このように一方が定数関数のときは、扱いやすくなります。

◆回転体の体積計算

Ⅰ）$y=f(x)$をx軸まわりに回転したとき

$$V=\int_a^b \pi\{f(x)\}^2dx$$

Ⅱ）$x=g(y)$をx軸まわりに回転したとき

$$V=\int_a^b \pi\{g(y)\}^2dy$$

(2) ◆接線の方程式

関数 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は、

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

◆共通接線

関数 $y=f(x),\ y=g(x)$ が与えられたとき、共通接線が存在する条件は、それぞれの接点の座標を$(s,f(s)),\ (t,g(t))$ として得られる次の 2 つの接線

$$\begin{cases} y=f'(s)(x-s)+f(s) \\ y=g'(t)(x-t)+g(t) \end{cases}$$

が、一致するような s,t が存在することです。

(3) ◆数列の和と一般項の関係

数列$\{a_n\}$ の和を S_n としたとき

$$a_1=S_1,\ \ a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geqq 2)$$

◆漸化式 $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 型

階差数列が、$a_{n+1}-a_n=f(n)$ となるので

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \quad (n \geqq 2)$$

◆漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ 型

特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ の解 α を用いて

$$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$$

と式変形でき、

$$a_n = (a_1 - \alpha)p^{n-1} + \alpha$$

◆漸化式 $a_{n+1} = pa_n + \alpha n + \beta$ 型

解法Ⅰ） $a_{n+2} = pa_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta \cdots$①

$a_{n+1} = pa_n + \alpha n + \beta \cdots$②

①－②より、 $a_{n+1} = pa_n + q$ 型に帰着します。

解法Ⅱ） $a_{n+1} + A(n+1) + B = p(a_n + An + B)$

を満たす$A,\ B$ を求めると、等比数列 型に帰着します。

(4) ◆正弦定理

△ABC において、次のことが成り立ちます。ただし、R は△ABC の外接円の半径です。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

◆余弦定理

△ABC において、次のことが成り立ちます。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

◆△ABC の外心

△ABC において、3 辺の垂直 2 等分線は 1 点で交わります。この交点を外心といい、△ABC の外接円の中心となります。

◆2 つのベクトルの直交条件

$$\vec{a} \perp \vec{b} \left(\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}\right) \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

◆ベクトルの分解

$\vec{a} \neq \vec{0},\ \vec{b} \neq \vec{0},\ \vec{a}$と$\vec{b}$が平行でないとき、任意のベクトル$\vec{p}$ は、次のようにただ一通りに表すことができる。

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} \quad \text{ただし } s, t \text{ は実数}$$

○解答・解説

(1)

【方針】

前半の方程式の問題は、グラフを使って考えます。方程式$\sqrt{4x-3} = x + k$ の実数解の個数が 2 個であるとき、$y = \sqrt{4x-3}$ と $y = x + k$ の共有点の個数も 2 個となります。それぞれのグラフを書き共有点が 2 個となるような k の値の範囲を定めます。回転体の体積は、原則に従って計算します。

【解説】

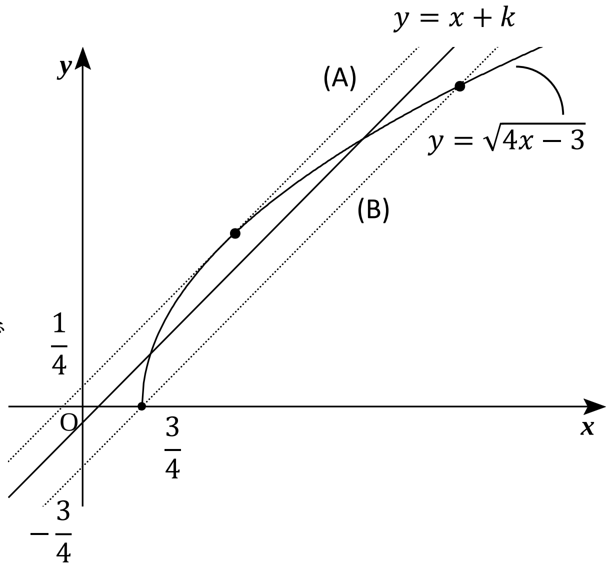
方程式$\sqrt{4x-3} = x + k$ の解の個数は、曲線 $y = \sqrt{4x-3}$ ⋯① と直線 $y = x + k$ ⋯② の共有点の個数と一致します。

①と②のグラフを書いて、それらの共有点が 2 個となるように k の値の範囲を定めます。

まず、①と②が接するときの k の値を求めます。

$$\sqrt{4x-3} = x + k$$

の両辺を 2 乗して



$$4x - 3 = (x+k)^2$$
$$x^2 + 2(k-2)x + k^2 + 3 = 0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると、①と②が接するには重解を持てばよいので

$$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - (k^2+3) = 0$$
$$-4k + 1 = 0$$
$$k = \frac{1}{4}$$

このとき、直線は(A)となります。

また直線②が、点$\left(\frac{3}{4}, 0\right)$を通るとき、

$$k = -\frac{3}{4}$$

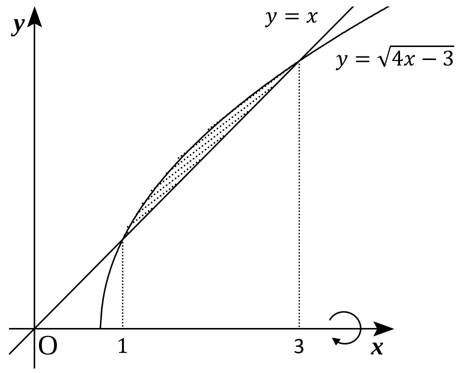
このとき、直線は(B)となります。

図から、共有点が 2 個となるのは、 $\underline{-\frac{3}{4} \leqq k < \frac{1}{4}}$

また、共有点が 1 個となるのは、$\underline{k = \frac{1}{4},\ k < -\frac{3}{4}}$

次に、回転体の体積を求めます。まず、曲線 $y = \sqrt{4x-3}$ と直線 $y = x$ との共有点の座標を求めます。$y = \sqrt{4x-3}$ の定義域は $4x - 3 > 0$ より

$$x > \frac{3}{4} \cdots ③$$



$$\sqrt{4x-3} = x$$
$$4x - 3 = x^2$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$(x-3)(x-1) = 0$$
$$x = 1,\ 3$$

この値は、③を満たすので解となり得ます。

よってグラフから、囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積は

$$\int_1^3 \pi\left\{\left(\sqrt{4x-3}\right)^2 - x^2\right\}dx = \int_1^3 \pi(4x-3-x^2)dx$$
$$= -\int_1^3 \pi(x-1)(x-3)dx$$
$$= \frac{\pi}{6}(3-1)^3 = \underline{\frac{4}{3}\pi}$$

$$\boxed{\int_a^b (x-a)(x-b)dx = -\frac{(b-a)^3}{6}}$$

-----参考-----

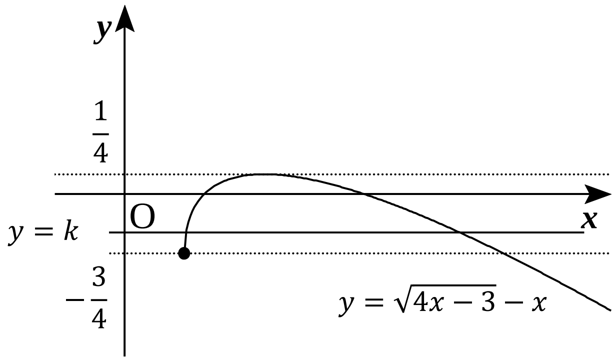
$\sqrt{4x-3} = x + k \iff \sqrt{4x-3} - x = k$ なので、$y = \sqrt{4x-3} - x$ と $y = k$ との共有点が 2 個となるように k の値を定めてもよい。

$$y = \sqrt{4x-3} - x$$
$$y' = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4x-3}} - 1$$
$$= \frac{2}{\sqrt{4x-3}} - 1$$

x	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	$\frac{7}{4}$	$\cdots$
y'		+	0	―
y	$-\frac{3}{4}$	↗	$\frac{1}{4}$	↘

$y' = 0$ となるのは

$$\frac{2}{\sqrt{4x-3}} = 1$$
$$\sqrt{4x-3} = 2$$
$$4x - 3 = 4$$
$$x = \frac{7}{4}$$



よって、共有点が 2 個となるのは、 $-\frac{3}{4} \leqq k < \frac{1}{4}$

また、共有点が 1 個となるのは、$k = \frac{1}{4},\ k < -\frac{3}{4}$

(2)

【方針】

共有点において共通の接線を持つことから、共有点を設定しそれぞれの接線の方程式を求めます。それらが一致するので原則に従って、方程式を立てていきます。

【解説】

曲線 $y = kx^3 - 1$ と曲線 $y = \log x$ の共有点の x 座標を t とします。

曲線 $y = kx^3 - 1$ 上の点$(t,\ kt^3 - 1)$ における接線の方程式は

$y' = 3kx^2$ より

$$y = 3kt^2(x - t) + kt^3 - 1$$
$$= 3kt^2 x - 2kt^3 - 1$$

曲線 $y = \log x$ 上の点$(t,\ \log t)$ における接線の方程式は

$y' = \frac{1}{x}$ より

$$y = \frac{1}{t}(x - t) + \log t$$
$$= \frac{1}{t}x + \log t - 1$$

これらが一致するので、傾きと y 切片がそれぞれ等しくなります。つまり

$$\begin{cases} 3kt^2 = \dfrac{1}{t} \cdots ① \\ -2kt^3 - 1 = \log t - 1 \cdots ② \end{cases}$$

①より、$kt^3 = \dfrac{1}{3}$ を②に代入して

$$-2 \cdot \frac{1}{3} = \log t$$

$$t = e^{-\frac{2}{3}}$$

このとき、$k = \dfrac{1}{3t^3} = \dfrac{1}{3e^{-2}} = \underline{\dfrac{e^2}{3}}$

また、共通の接線の方程式は

$$y = \frac{1}{e^{-\frac{2}{3}}}x + \log e^{-\frac{2}{3}} - 1 = \underline{e^{\frac{2}{3}}x - \frac{5}{3}}$$

---参考---

2 曲線の共有点における共通接線なので

$f(x) = kx^3 - 1\,, g(x) = \log x$ 、共有点の x 座標を t として

傾きが等しくなることから

$$f'(t) = g'(t) \Leftrightarrow 3kt^2 = \frac{1}{t}$$

共有点の y 座標が等しいことから

$$f(t) = g(t) \Leftrightarrow kt^3 - 1 = \log t$$

として、連立方程式をたててもよい。

(3)

【方針】

数列の和 S_n と一般項 a_n との間には、$a_n = S_n - S_{n-1}\ (n \geqq 2)$ という関係があります。これを利用する為に、与えらえた漸化式の番号を 1 つ減らし新たに得られた漸化式と元の漸化式の辺々を引いて、$S_n - S_{n-1}$ の形を作ります。すると、$a_{n+1} = pa_n + \alpha n + \beta$ 型の漸化式になるので、原則を利用して一般項を求めます。

a_4 については、与えられた漸化式を利用して、a_2, a_3, a_4 の順に計算してできますが、先に一般項を求めてそれを利用することにします。

【解説】

$n \geqq 2$ とします。与えられた漸化式

$$a_{n+1} = S_n + n^2 + 1 \cdots ①$$

の番号を1つ減らして

$$a_n = S_{n-1} + (n-1)^2 + 1 \cdots ②$$

①−②より

$$a_{n+1} - a_n = S_n - S_{n-1} + n^2 - (n-1)^2$$
$$= a_n + 2n - 1$$
$$a_{n+1} = 2a_n + 2n - 1 \cdots ③$$

ここで注意することは、③は $n \geqq 2$ のときに成立する漸化式なので、$n = 1$ のときも成立するか確認します。

①より、$a_2 = S_1 + 1^2 + 1 = 3$

③に $n = 1$ を代入すると $a_2 = 2a_1 + 2 \cdot 1 - 1 = 3$

よって、全ての自然数で③が成立します。

次に、漸化式③を解くために次のような実数 α, β を求めます。

$$a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = 2(a_n + \alpha n + \beta)$$

括弧をはずして整理すると

$$a_{n+1} = 2a_n + \alpha n - \alpha + \beta$$

③と係数を比べて

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ -\alpha + \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

従って、

③ $\Leftrightarrow a_{n+1} + 2(n+1) + 1 = 2(a_n + 2n + 1)$

$b_n = a_n + 2n + 1$ とおくと

$$b_{n+1} = 2b_n$$

$\{b_n\}$ は初項 $b_1 = a_1 + 2 \cdot 1 + 1 = 4$ 、公比2の等比数列なので

$$b_n = 2^{n-1} \cdot 4$$
$$= 2^{n+1}$$

よって

$$\underline{a_n = 2^{n+1} - 2n - 1}$$

$n = 4$ のとき

$$a_4 = 2^5 - 2 \cdot 4 - 1 = \underline{23}$$

さらに、⑤から

$$S_n = a_{n+1} - n^2 - 1$$

$= 2^{n+2} - 2(n+1) - 1 - n^2 - 1$
$= \underline{2^{n+2} - n^2 - 2n - 4}$

-----参考-----

③の漸化式は、次のように解くこともできます。

$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2(n+1) - 1 \cdots$④
$a_{n+1} = 2a_n + 2n - 1 \cdots$⑤

④－⑤

$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) + 2$

$b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと

$b_{n+1} = 2b_n + 2$
$b_{n+1} + 2 = 2(b_n + 2)$

数列$\{b_n + 2\}$ は初項 $b_1 + 2 = a_2 - a_1 + 2 = 4$ 、公比 2 の等比数列なので

$b_n + 2 = 4 \cdot 2^{n-1}$
$b_n = 2^{n+1} - 2$

従って

$a_{n+1} - a_n = 2^{n+1} - 2$

これは、階差型の漸化式なので

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2^{k+1} - 2)$$

$$= 1 + \frac{4(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} - 2(n-1)$$

$$= 2^{n+1} - 2n - 1$$

これは、$n = 1$ のときも成立します。

従って、すべての自然数n で、$\underline{a_n = 2^{n+1} - 2n - 1}$

(4)

【方針】

（ｉ）外接円の半径なので、正弦定理を使うことを考えます。それには、辺 BC の長さが必要となり、それは余弦定理から求めます。

（ⅱ）$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = s\vec{b} + t\vec{c}$ とおきます。s と t に関する連立方程式を立て、s と t の値を求めます。その為に外心の定義を利用します。 外心は、各辺の垂直 2 等分線の交点なので線分 AB の中点を M、線分 AC の中点を N としたときに、$\overrightarrow{\mathrm{MO}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{NO}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となります。2 つベクトルが垂直のときは、内積が 0 になることから方程式が立てられます。

【解説】

（ⅰ）△ABC において、余弦定理から

$$\mathrm{BC}^2 = 3^2 + 4^2 - 2\cdot 3\cdot 4\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= 25 - 12 = 13$$

$$\therefore \mathrm{BC} = \sqrt{13}$$

次に、外接円の半径を R とすると正弦定理から

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin A} = 2R$$

$$R = \frac{\sqrt{13}}{2\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$$

$$= \underline{\frac{\sqrt{39}}{3}}$$

（ⅱ）$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = s\vec{b} + t\vec{c}\ (s, t\ \text{は実数})$ とおきます。

線分 AB の中点を M、線分 AC の中点を N とし、点 O が外心であることから

$$\overrightarrow{\mathrm{MO}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{NO}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

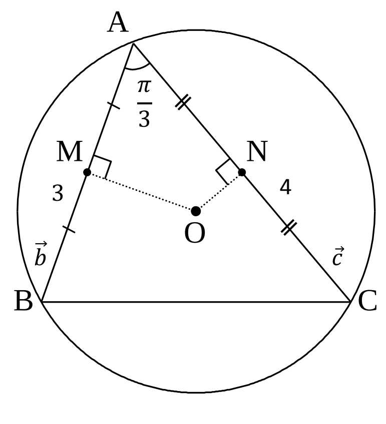
ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{MO}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{AO}}$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{b} + s\vec{b} + t\vec{c} = \left(s - \frac{1}{2}\right)\vec{b} + t\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{NO}} = \overrightarrow{\mathrm{NA}} + \overrightarrow{\mathrm{AO}}$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{c} + s\vec{b} + t\vec{c} = s\vec{b} + \left(t - \frac{1}{2}\right)\vec{c}$$



なので

$$\overrightarrow{\mathrm{MO}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$$

$$\left\{\left(s - \frac{1}{2}\right)\vec{b} + t\vec{c}\right\}\cdot\vec{b} = 0$$

$$\left(s - \frac{1}{2}\right)\left|\vec{b}\right|^2 + t\vec{b}\cdot\vec{c} = 0 \cdots ①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{NO}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}} \iff \overrightarrow{\mathrm{NO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$$

$$\left\{s\vec{b} + \left(t - \frac{1}{2}\right)\vec{c}\right\} \cdot \vec{c} = 0$$

$$s\vec{b} \cdot \vec{c} + \left(t - \frac{1}{2}\right)|\vec{c}|^2 = 0 \cdots ②$$

$\left|\vec{b}\right| = 3, |\vec{c}| = 4,\ \vec{b} \cdot \vec{c} = 3 \cdot 4\cos\dfrac{\pi}{3} = 6$ を①②に代入して

$$\begin{cases} 3^2\left(s - \frac{1}{2}\right) + 6t = 0 \\ 6s + 4^2\left(t - \frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6s + 4t = 3 \\ 6s + 16t = 8 \end{cases}$$

連立方程式を解いて

$$s = \frac{2}{9}, \qquad t = \frac{5}{12}$$

よって

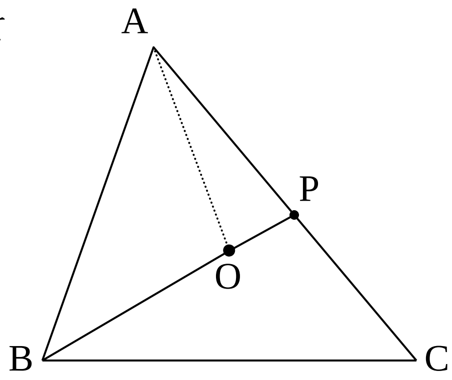
$$\underline{\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \frac{2}{9}\vec{b} + \frac{5}{12}\vec{c}}$$

（ⅲ）点 P は直線 BO 上にあるので、実数 l を用いて $\overrightarrow{\mathrm{BP}} = l\overrightarrow{\mathrm{BO}}$ と表せます。従って

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}}$$
$$= \vec{b} + l\overrightarrow{\mathrm{BO}}$$

ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{BO}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$= \frac{2}{9}\vec{b} + \frac{5}{12}\vec{c} - \vec{b} = -\frac{7}{9}\vec{b} + \frac{5}{12}\vec{c}$$



より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{b} + l\left(-\frac{7}{9}\vec{b} + \frac{5}{12}\vec{c}\right)$$
$$= \left(1 - \frac{7}{9}l\right)\vec{b} + \frac{5}{12}l\vec{c}$$

点 P は、AC 上の点なので

$$1 - \frac{7}{9}l = 0 \ \therefore l = \frac{9}{7}$$

このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{5}{12} \cdot \frac{9}{7}\vec{c} = \frac{15}{28}\vec{c}$$

よって

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PC}=\underline{15:13}$$

(5)

【方針】

この問題は、食堂を選ぶという試行を毎日繰り返す、反復試行の問題です。注意するのは前日の結果によって当日選択できる食堂が変わることです。1 日目だけは、前日がありません。しかし、問題に「1 日目は別々の食堂で食事をとった」とありますので、このイレギュラーな点は省けます。

まず、食堂を選んだ結果一緒に食事をとる確率、別々に食事をとる確率を、それぞれ求めます。解答欄(セ)では、7 日目に一緒に食事をとりますが、その確率は前日の状況によって変わるので場合分けが必要です。

【解説】

二人が一緒に食事をとる確率、別々に食事をとる確率を次のように場合分けして求めます。

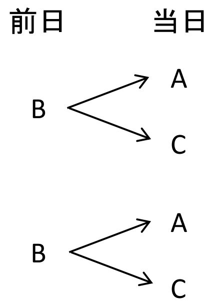
ⅰ）前日に 2 人が一緒に食事をとったとき

再度、一緒に食事をとる確率は、2 人とも選べる食堂は同じなので

$$\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}$$

逆に、別々に食事をとる確率は

$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$



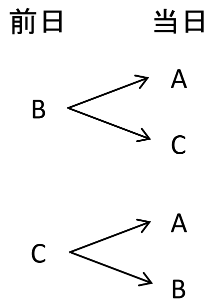
ⅱ）前日に 2 人が別々に食事をとったとき

一緒に食事をとる確率は、それぞれ選べる食堂は 2 種類で、そのうち同じ食堂となるのは 1 種類なので

$$\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$$

別々に食事をとる確率は

$$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$



ここで、3 日目に初めて一緒に食事をするのは

「2 日目は別々に食事をする。」かつ
「3 日目は一緒に食事をする。」ときです。

「2 日目に別々に食事をする」確率は、前日は別々に食事をしているので $\frac{3}{4}$

「3 日目に一緒に食事をする」確率は、前日は別々に食事をしているので $\frac{1}{4}$

従って、求める確率は

$$\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\underline{\frac{3}{16}}$$

次に、2 人が一緒に食事をとる 2 回目の日が 7 日目となる確率を、次のように前日の状況で場合分けをして求めます。

ｉ）6 日目に別々に食事をとったとき

この場合は、2 日目から 5 日目までの 4 日間のうちに 1 回一緒に食事をとることになります。そのような場合は、${}_4C_1$ 通りあります。

日	1	2	3	4	5	6	7
食事	×	×	○	×	×	×	○
確率		$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

次に、「一緒に食事をとる確率」は、どのような場合でも

前日は別々に食事をしているので、$\frac{1}{4}$

また、「別々に食事をとる確率」は、6 日目までまとめて考えると

1 回は、前日に一緒に食事をとっているので、$\frac{1}{2}$

3 回は、前日に別々に食事をとっているので、$\frac{3}{4}$

さらに、7 日目に「一緒に食事をとる確率」は、

前日は別々に食事をとっているので、$\frac{1}{4}$

以上より

$$ {}_4C_1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} $$

ⅱ）6 日目に一緒に食事をとったとき

この場合は、2 日目から 5 日目までの 4 日間すべて別々に食事をとることになります。

そのような確率は

4 日とも前日は別々に食事をしているので、$\left(\frac{3}{4}\right)^4$

また、6 日目に「一緒に食事をとる確率」は

前日は別々に食事をしているので、$\frac{1}{4}$

さらに、7 日目に「一緒に食事をとる確率」は

前日は一緒に食事をしているので、$\frac{1}{2}$

日	1	2	3	4	5	6	7
食事	×	×	×	×	×	○	○
確率		$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

以上より

$$ \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} $$

ⅰ）ⅱ）より、求める確率は

$$ {}_4C_1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} $$

$$ = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{3}{4}\right) $$

$$ = \frac{3^3 \times 7}{2 \times 4^5} = \underline{\frac{189}{2048}} $$

②2 次曲線

○原則

(1) ◆三角形の面積

△ABC において、$\angle \mathrm{A} = \theta$ とします。△ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\sin\theta$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}$$

また、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (a_1,\ b_1),\ \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (a_2,\ b_2)$ のとき

$$S = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$$

◆解と係数の関係

Ｉ）二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 つの解を$\alpha,\ \beta$ とします。このとき

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \qquad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

Ⅱ）2 数$\alpha,\ \beta$ に対して、$p = \alpha + \beta,\ q = \alpha\beta$ とすると

2 次方程式 $t^2 - pt + q = 0$ の 2 解は、$\alpha,\ \beta$ となります。

(2) ◆三角形の面積と内接円の半径

△ABC の面積を S 、内接円の半径を r とします。このとき

$$S = \frac{r(a+b+c)}{2}$$

◆楕円の定義

平面上に 2 定点F, F′ をとるとき

$$\mathrm{PF} + \mathrm{PF'} = (\text{一定値})$$

を満たす点 P の軌跡を、F, F′ を焦点とする楕円という。

◆楕円の性質

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b > 0)$ において

焦点 $\mathrm{F}\left(\sqrt{a^2 - b^2},\ 0\right),\ \mathrm{F'}\left(-\sqrt{a^2 - b^2},\ 0\right)$

$\mathrm{PF} + \mathrm{PF'} = 2a$

◆関数の最大値・最小値を求める

基本の考えは、グラフを書いてグラフから最大値・最小値を読み取ることです。

その為に微分して増減表を書きます。

たまに、有名不等式(相加平均・相乗平均の関係など)を使って解くこともあります。

○解答・解説

(1)

【方針】

平面上の 3 点で作る三角形の面積を求めるとき、それら 3 点の座標が分かるときは、ベクトルを使って解くのがいいでしょう。この問題では、1 つは $\mathrm{F}\left(\sqrt{3},\ 0\right)$ 残り 2 つは楕円と直線の交点なので、該当します。

別解として、直線がもう一つの焦点$\mathrm{F}'\left(-\sqrt{3},\ 0\right)$を通ることに着目します。

【解説】

2 点$\mathrm{P},\ \mathrm{P}'$の座標を調べるために、楕円と直線の方程式を連立します。

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \cdots ① \\ x+\sqrt{3}=ky \cdots ② \end{cases}$$

②より、$x=ky-\sqrt{3}$ として①に代入すると

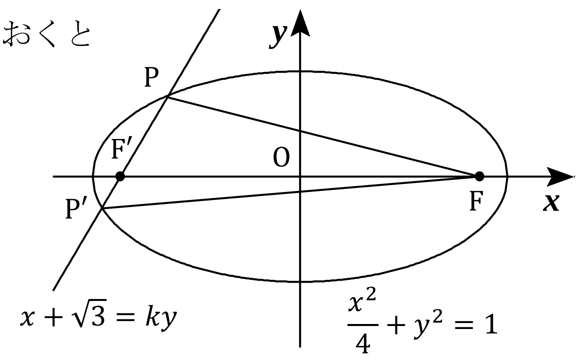
$$\frac{1}{4}\left(ky-\sqrt{3}\right)^2+y^2=1$$

$$\left(ky-\sqrt{3}\right)^2+4y^2=4$$

$$(k^2+4)y^2-2\sqrt{3}ky-1=0 \cdots ③$$

y についての 2 次方程式③の 2 解を $\alpha,\ \beta$ とおくと

$$\mathrm{P}\left(k\alpha-\sqrt{3},\ \alpha\right),\ \mathrm{P}'\left(k\beta-\sqrt{3},\ \beta\right)$$



と表せます。$\mathrm{F}\left(\sqrt{3},\ 0\right)$ なので

$$\overrightarrow{\mathrm{FP}}=\left(k\alpha-2\sqrt{3},\ \alpha\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{FP}'}=\left(k\beta-2\sqrt{3},\ \beta\right)$$

$\triangle \mathrm{PP}'\mathrm{F}$ の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\left|\left(k\alpha-2\sqrt{3}\right)\beta-\alpha\left(k\beta-2\sqrt{3}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|2\sqrt{3}(\alpha-\beta)\right|=\sqrt{3}|\alpha-\beta|$$

ここで、解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=\frac{2\sqrt{3}k}{k^2+4},\qquad \alpha\beta=\frac{-1}{k^2+4}$$

であり、また

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\&=\left(\frac{2\sqrt{3}k}{k^2+4}\right)^2-4\left(\frac{-1}{k^2+4}\right)\\&=\frac{12k^2+4(k^2+4)}{(k^2+4)^2}=\frac{16(k^2+1)}{(k^2+4)^2}\end{aligned}$$

よって

$$|\alpha-\beta|=\frac{4\sqrt{k^2+1}}{k^2+4}$$

従って

$$\underline{S=\frac{4\sqrt{3(k^2+1)}}{k^2+4}}$$

-----参考-----

直線 $x+\sqrt{3}=ky$ で、$y=0$ のとき $x=-\sqrt{3}$ なので焦点$\mathrm{F}'\left(-\sqrt{3},\ 0\right)$ を通ります。

よって、$\triangle\mathrm{PP'F}$ の辺$\mathrm{PP'}$ 上に焦点F' があるので

$$\triangle\mathrm{PP'F}=\triangle\mathrm{PFF'}+\triangle\mathrm{P'FF'}$$

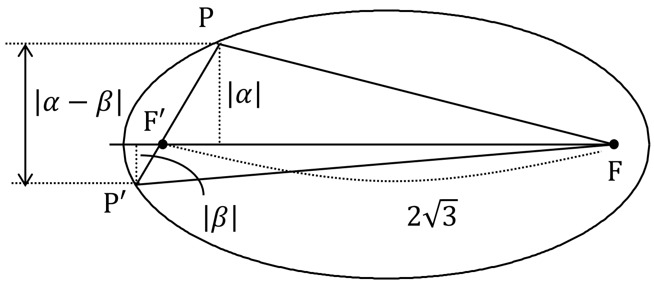
$\triangle\mathrm{PFF'}$と $\triangle\mathrm{P'FF'}$ の底辺を$\mathrm{FF'}$ にとると、焦点の座標から

$$\mathrm{FF'}=2\sqrt{3}$$

であり、点 P、点P' の y 座標をそれぞれ $\alpha,\ \beta$ とすると
$\triangle\mathrm{PFF'}$と $\triangle\mathrm{P'FF'}$ の高さは、それぞれ$|\alpha|,\ |\beta|$ となります。

よって

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\mathrm{FF'}\cdot|\alpha|+\frac{1}{2}\mathrm{FF'}\cdot|\beta|\\&=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}(|\alpha|+|\beta|)\end{aligned}$$



今、点 P と点P'は x 軸に関して反対側にあるので

$$|\alpha|+|\beta|=|\alpha-\beta|$$

従って、$S=\sqrt{3}|\alpha-\beta|$

以下は同様です。

(2)

【方針】

三角形の内接円の半径ときたら、原則にあるように三角形の面積と内接円の半径の関係が利用できないか考えます。(1)で三角形の面積を計算しているのでこの方針で解けそうです。残る問題は三角形の 3 辺の和ですが、辺$\mathrm{PP'}$が焦点$\mathrm{F'}$を通ることに着目して楕円の性質を使うと簡単に求められます。

【解説】

$\triangle\mathrm{PP'F}$ の内接円の半径を r とします。このとき$\triangle\mathrm{PP'F}$ の面積S は

$$S = \frac{r}{2}(\mathrm{PP'} + \mathrm{P'F} + \mathrm{FP})$$

で表せます。(1)より S は計算されているので、次に 3 辺の長さの和を求めます。

線分$\mathrm{PP'}$ は焦点 $\mathrm{F'}$ を通るので

$$\begin{aligned}\mathrm{PP'} + \mathrm{P'F} + \mathrm{FP} &= \mathrm{PF'} + \mathrm{F'P'} + \mathrm{P'F} + \mathrm{FP} \\ &= \mathrm{FP} + \mathrm{F'P} + \mathrm{FP'} + \mathrm{F'P'}\end{aligned}$$

F, $\mathrm{F'}$ は楕円 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ の焦点なので

$$\mathrm{FP} + \mathrm{F'P} = \mathrm{FP'} + \mathrm{F'P'} = 4$$

よって

$$\mathrm{PP'} + \mathrm{P'F} + \mathrm{FP} = 4 + 4 = 8$$

従って

$$\frac{4\sqrt{3(k^2+1)}}{k^2+4} = \frac{r}{2}\cdot 8 = 4r$$

$$r = \frac{\sqrt{3(k^2+1)}}{k^2+4} = \underline{\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{k^2+1}}{k^2+4}}$$

次に、r を k についての関数とみて微分し、増減表から r の最大値を求めます。

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dk} &= \sqrt{3}\cdot\frac{2k\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{k^2+1}}\cdot(k^2+4) - \sqrt{k^2+1}\cdot(2k)}{(k^2+4)^2} \\ &= \sqrt{3}\cdot\frac{k(k^2+4) - (k^2+1)2k}{(k^2+4)^2\sqrt{k^2+1}} \\ &= \sqrt{3}\cdot\frac{k(2-k^2)}{(k^2+4)^2\sqrt{k^2+1}}\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{3}k(\sqrt{2}-k)(\sqrt{2}+k)}{(k^2+4)^2\sqrt{k^2+1}}$$

k	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$\frac{dr}{dk}$	＋	0	ー	0	＋	0	ー
r	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘

$k=\pm\sqrt{2}$ のとき

$$r=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2+1}}{2+4}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$k=0$ のとき

$$r=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

増減表から最大値は、$k=\pm\sqrt{2}$ のとき $r=\frac{1}{2}$

③奇関数・偶関数

○原則

(1) ◆奇関数

関数 $f(x)$ が奇関数であるとは、全ての実数 x に対して

$$f(-x)=-f(x)$$

を満たすときのことをいいます。

(2) ◆偶関数

関数 $f(x)$ が偶関数であるとは、全ての実数 x に対して

$$f(-x)=f(x)$$

を満たすときのことをいいます。

(3) ◆関数の平行移動

関数 $y=f(x)$ を x 軸方向に a 、y 軸方向に b 平行移動した関数は

$$y=f(x-a)+b$$

◆2 曲線の共有点

曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ の共有点の個数は、$h(x)=f(x)-g(x)$ と x 軸との共有点の個数と一致する。

(4) ◆関数の最大値・最小値を求める

基本の考えは、グラフを書いてグラフから最大値・最小値を読み取ることです。その為に微分して増減表を書きます。

たまに、有名不等式(相加平均・相乗平均の関係など)を使って解くこともあります。

〇解答・解説

(1)

【方針】

関数 $f(x)$ は奇関数なので、原点対称となります。つまり原点を通ります。

【解説】

関数 $f(x)$ は奇関数なので、原点対称です。従って

$\underline{f(0)=0}$

-----参考-----

奇関数の定義から、すべての実数 x について

$f(-x)=-f(x)$

が成立します。 $x=0$ のとき、$f(0)=-f(0)$ より $\underline{f(0)=0}$

(2)

【方針】

導関数 $f'(x)$ が偶関数であることを証明するには、偶関数の定義に従い $f'(-x)=f'(x)$ であることを示します。それには、関数 $f(x)$ が$f(-x)=-f(x)$ を満たすことを利用して、等式の両辺を微分します。

【解説】

関数 $f(x)$ は奇関数なので

$$f(-x)=-f(x)$$

両辺 x で微分して

$$-f'(-x)=-f'(x)$$
$$f'(-x)=f'(x)$$

よって、$f'(x)$ は偶関数となります。

(3)

【方針】

C_2 から C_1 を引いた関数を $g(x)$ とします。C_1 と C_2 の共有点の個数が 2 個となるのは、$y=g(x)$ と x 軸との共有点が 2 個であることです。$y=g(x)$ を微分して、増減表からそのことを示します。

【解説】

C_1 ： $y=f(x)$ をx 軸方向に a 、y 軸方向に $f(a)$ 平行移動したC_2 は

$$y=f(x-a)+f(a)$$

で表されます。

C_1 と C_2 の共有点の個数が 2 個であることは、方程式

$$f(x)=f(x-a)+f(a)$$

が異なる 2 つの実数解を持つこと同値であり

$$g(x)=f(x-a)+f(a)-f(x)$$

とおいたときに、$g(x)$ が x 軸と異なる 2 点で交わることになります。

それを示す為に、微分して増減表を書きます。

$$g'(x)=f'(x-a)-f'(x)$$

$g'(x)=0$ 、つまり $f'(x)=f'(x-a)$ となる x の値は、 $f'(x)$ が偶関数なので

$$x=-(x-a)$$

$$x=\frac{a}{2}\cdots ①$$

また、$f'(x)$ は$x>0$ のとき$f''(x)>0$ であることから単調増加です。

このことから、 $f'(x)=f'(x-a)$ を満たす x は①のみであることがわかります。

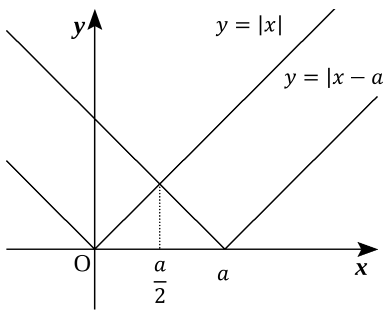
次に、$x=\dfrac{a}{2}$ の前後での $g'(x)$ の正負を調べます。

$f'(-x)=f'(x)$ から $f(x)=f(|x|)$ となることを利用して

ⅰ）$x>\dfrac{a}{2}$ のとき

$|x|>|x-a|$ で、$f'(x)$ が増加関数より

$$\begin{aligned}g'(x)&=f'(x-a)-f'(x)\\&=f'(|x-a|)-f'(|x|)<0\end{aligned}$$



ⅱ）$x<\dfrac{a}{2}$ のとき

$|x|<|x-a|$ で、$f'(x)$ が増加関数より

$$\begin{aligned}g'(x)&=f'(x-a)-f'(x)\\&=f'(|x-a|)-f'(|x|)>0\end{aligned}$$

x	$\cdots$	$\frac{a}{2}$	$\cdots$
$g'(x)$	＋	0	―
$g(x)$	↗	$f(a)-2f\left(\frac{a}{2}\right)$	↘

また

$$g\left(\frac{a}{2}\right)=f\left(\frac{a}{2}-a\right)+f(a)-f\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$=f(a)-2f\left(\frac{a}{2}\right)$$

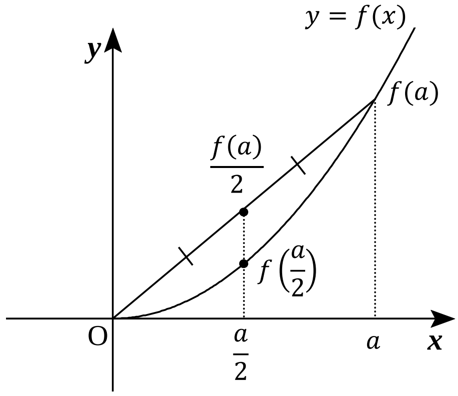
ここで関数 $y=f(x)$ は、$x>0$ のとき $f''(x)>0$ より下に凸で増加関数です。

右図から

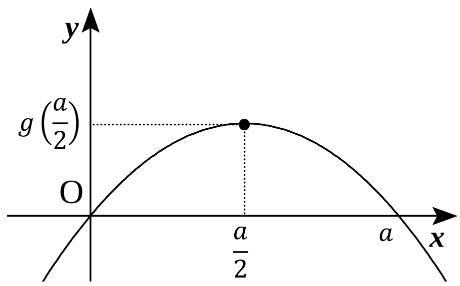
$$\frac{f(a)}{2}>f\left(\frac{a}{2}\right)$$

従って

$$f(a)-2f\left(\frac{a}{2}\right)=g\left(\frac{a}{2}\right)>0$$



グラフから、$y=g(x)$ は x 軸と異なる 2 点で交わります。即ち、C_1 と C_2 の共有点の個数は 2 個となります。(証明終わり)



さらに

$$g(a)=f(0)+f(a)-f(a)=0$$
$$g(0)=f(-a)+f(a)-f(0)=0$$

より、共有点の x 座標は $\underline{x=0,\ a}$ となります。

(4)

【方針】

$S(a)$ を計算し、それを微分し増減表を書いて、最大値となる a の値を読み取ります。$S'(a)$ の正負が分からないときは、$S''(a)$ を求めて $S'(a)$ の増減を調べます。

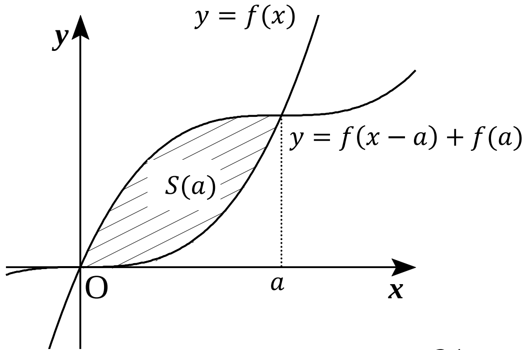
【解説】

$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とします。

(2) より積分区間は、$0\leqq x\leqq a$ であり

このとき C_2 が C_1 より上側にあるので

$$S(a)=\int_0^a\{f(x-a)+f(a)-f(x)\}dx$$
$$=[F(x-a)+f(a)\cdot a-F(x)]_0^a$$
$$=F(0)+f(a)\cdot a-F(a)-F(-a)+F(0)$$



$$= f(a)\cdot a - F(a) - F(-a) + 2F(0)$$

$$S'(a) = f'(a)\cdot a + f(a) - f(a) + f(-a)$$
$$= f'(a)\cdot a - f(a)$$

$$S''(a) = f''(a)\cdot a + f'(a) - f'(a)$$
$$= f''(a)\cdot a$$

a	0	$\cdots$	3
$S''(a)$	0	+	
$S'(a)$	0	↗	

a	0	$\cdots$	3
$S'(a)$	0	+	
$S(a)$	0	↗	

$0 \leqq a \leqq 3$ のとき $f''(a) > 0$ なので

$S''(a) \geqq 0$

であり、$S'(0) = -f(0) = 0$ より$S'(a) \geqq 0$

従って、$S(a)$ は増加関数なので、$0 \leqq a \leqq 3$ のとき

$\underline{a = 3}$ で最大値を取ります。