日本医科大学入試

2015 年数学

解答・解説編

①小問集合

○原則

１．◆漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ 型

特性方程式 $\alpha=p\alpha+q$ の解 α を用いて

$$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$$

と式変形でき、数列$\{a_n-\alpha\}$は初項$a_1-\alpha$、公比 p の等比数列なので

$$a_n=(a_1-\alpha)p^{n-1}+\alpha$$

２．◆累乗の極限

$$\lim_{n\to\infty} r^n=\begin{cases}+\infty\ (r>1)\\ 1\ (r=1)\\ 0(|r|<1)\\ \text{振動}\ (r\leqq -1)\end{cases}$$

３．◆領域と最大値・最小値

点 $(x,\ y)$ が領域 D 内の点であるとき、$f(x,\ y)$ の最大値・最小値を求めるには曲線 $f(x,\ y)=k$ と領域 D が共有点を持つように k の値の取り得る範囲を考えます。最大値と最小値は、図から読み取ることができます。

○解答・解説

(問 1)

【方針】

(1) $n+1$ 秒後に、P が A にいる為には、n 秒後の P の位置から$n+1$ 秒後にどのように推移したらよいのか考えると、n 秒後に A にいて、そのまま A にいる場合か n 秒後に B もしくは C にいて、$n+1$ 秒後に、A に移動する場合が考えられます。

(2) (1)で得た漸化式を解きます。$a_{n+1}=pa_n+q$ 型なので原則に従い解きます。また、次の点に注意します。0 秒のとき P は A にいるとあるので、$n=0,1,2,\cdots$ と番号は 0 から始まります。

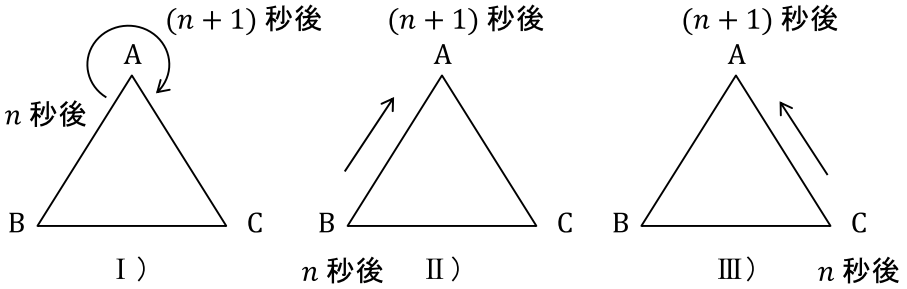
(3) (2)で得た p_n の極限を求めます。

(4) (2)(3)から$|p_n-p|$ を求め、不等式の両辺常用対数をとります。すると、n についての 1 次不等式が得られます。

【解説】

$n+1$ 秒後に、P が A にいるには、次のような場合が考えられます。

Ⅰ）n 秒後に P が A にいて $n+1$ 秒後もそのまま A にいる場合
Ⅱ）n 秒後に P が B にいて $n+1$ 秒後、A に移動する場合
Ⅲ）n 秒後に P が C にいて $n+1$ 秒後、A に移動する場合



それぞれの場合について、確率を求めます。

Ⅰ）のとき

n 秒後に P が A にいる確率は、p_n

$n+1$ 秒後にそのまま A にいる確率は、$\frac{1}{4}$

よって、$p_n \times \frac{1}{4}$

Ⅱ）のとき

n 秒後に P が B にいる確率は、n 秒後に P が C にいる確率と等しく

$\frac{1}{2}(1-p_n)$

$n+1$ 秒後に A に移動する確率は、$\frac{3}{8}$

よって、$\frac{1}{2}(1-p_n) \times \frac{3}{8} = \frac{3}{16}(1-p_n)$

Ⅲ）のとき

n 秒後に P が C にいる確率は、$\frac{1}{2}(1-p_n)$

$n+1$ 秒後に A に移動する確率は、$\frac{3}{8}$

よって、$\frac{1}{2}(1-p_n) \times \frac{3}{8} = \frac{3}{16}(1-p_n)$

Ⅰ）Ⅱ）Ⅲ）より

$$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + 2 \times \frac{3}{16}(1 - p_n)$$

$$= -\frac{1}{8}p_n + \frac{3}{8}$$

(2)　(1)より

$$p_{n+1} = -\frac{1}{8}p_n + \frac{3}{8}$$

$$p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{8}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$$

数列$\left\{p_n - \frac{1}{3}\right\}$は、初項$p_0 - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$、公比$-\frac{1}{8}$の等比数列なので

$$p_n - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^n$$

$$p_n = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^n + \frac{1}{3} \ (n = 0,1,2,\cdots)$$

(3)　(2)より

$$p = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^n + \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}$$

(4)　(2)(3)より

$$|p_n - p| = \left|\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^n\right| = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^n$$

よって

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^n < 5^{-20}$$

$$2^{-3n+1} < 3 \cdot \left(\frac{10}{2}\right)^{-20}$$

$$2^{-3n+1} \cdot 2^{-20} < 3 \cdot 10^{-20}$$

$$2^{-3n-19} < 3 \cdot 10^{-20}$$

両辺、常用対数をとると

$$\log_{10} 2^{-3n-19} < \log_{10} 3 \cdot 10^{-20}$$

$$(-3n - 19)\log_{10} 2 < \log_{10} 3 - 20$$

$$3n \log_{10} 2 > 20 - \log_{10} 3 - 19 \log_{10} 2$$

$$n > \frac{20 - \log_{10} 3}{3\log_{10} 2} - \frac{19}{3}$$
$$= \frac{20 - 0.4771}{3 \times 0.3010} - \frac{19}{3} = 15.29\cdots$$

n は整数なので、最小の n は、$\underline{n = 16}$

問 2

【方針】

(1) $\dfrac{y+1}{(x+1)^2} = k$ とおくと、$y = k(x+1)^2 - 1$ となり、この放物線と領域 D が共有点を持つときの k の最大値と最小値を図より読み取ります。

この放物線は頂点 $(-1, -1)$ で下に凸なグラフになります。k の値によってグラフの開き具合が変化することから、k の最大値はグラフの開きが一番狭いときであり、k の最小値は一番広いときとなります。

(2) 一見すると、相加平均・相乗平均の関係を使いたくなります。しかし、それでは最小値しか求められません。実際には等号成立しないので最小値も求められません。従って、微分して増減表から最大値・最小値を求めます。このとき(1)から得られる定義域に注意します。

【解説】

(1) 3 つの不等式が表す領域 D を図示すると、図の斜線部と境界部分になり、

$x \geqq 2,\ y \geqq 0$ です。

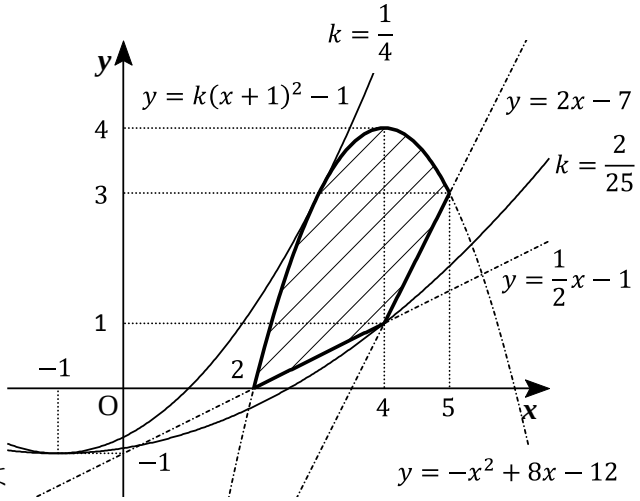
$\dfrac{y+1}{(x+1)^2} = k$ とおくと、

$x + 1 > 0,\ y + 1 > 0$ なので $k > 0$

また、$y = k(x+1)^2 - 1$ として

領域 D と放物線 $y = k(x+1)^2 - 1$ が共有点を持つときに、k の最大値と最小値を求めます。

k は放物線のグラフの開き具合を表します。k が最大値をとるのは、開きが具合が一番狭いとき、最小値をとるのは開き具合が一番広いときとなります。



開き具合が一番狭くなるのは、2 つの放物線 $y = k(x+1)^2 - 1$ と $y = -x^2 + 8x - 12$

が接するときです。それは、2 つの放物線の方程式を連立して得られる、x についての 2 次方程式

$$k(x+1)^2-1=-x^2+8x-12$$
$$\Leftrightarrow (k+1)x^2+2(k-4)x+k+11=0$$

が重解を持つときです。

判別式を D とすると $D=0$ となるので

$$\frac{D}{4}=(k-4)^2-(k+1)(k+11)=0$$
$$-8k+16-12k-11=0$$
$$-20k=-5$$
$$k=\frac{1}{4}$$

これは$k>0$ を満たすので解になり得ます。

またこのときの重解は

$$x=-\frac{k-4}{k+1}=-\frac{\frac{1}{4}-4}{\frac{1}{4}+1}=3$$

$$y=\frac{1}{4}(3+1)^2-1=3$$

2 次方程式$ax^2+bx+c=0$の解

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

重解は

$$x=\frac{-b}{2a}$$

従って、$(x,\ y)=(3,\ 3)$ のとき最大値は$\frac{1}{4}$です。

次に、開き具合が一番広くなるのは

放物線 $y=k(x+1)^2-1$ が点 $(4,\ 1)$ を通るときです。

$$1=k(4+1)^2-1$$
$$k=\frac{2}{25}$$

従って、$(x,\ y)=(4,\ 1)$ のとき最小値は$\frac{2}{25}$です。

(2)

$\frac{y+1}{(x+1)^2}=k$ とおくと、$\frac{y+1}{(x+1)^2}+\frac{(x+1)^2}{y+1}=k+\frac{1}{k}$

$f(k)=k+\frac{1}{k}$ とおいて

(1)より $\frac{2}{25}\leqq k\leqq\frac{1}{4}$ のときの $f(k)$ の最大値と最小値を求めます。

$$f'(k)=1-\frac{1}{k^2}=\frac{(k+1)(k-1)}{k^2}$$

$$f\left(\frac{2}{25}\right)=\frac{2}{25}+\frac{25}{2}=\frac{629}{50}$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}+\frac{4}{1}=\frac{17}{4}$$

よって、最大値 $\frac{629}{50}$、最小値 $\frac{17}{4}$

k	$\frac{2}{25}$	…	$\frac{1}{4}$
$f'(k)$		−	
$f(k)$	$\frac{629}{50}$	↘	$\frac{17}{4}$

②区分求積法

○原則

1．◆区分求積法

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$

$$=\int_a^b f(x)dx$$

とくに、$a=0,\ b=1$のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

2．◆部分積分

$$\int f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)\,dx$$

3．◆置換積分

方法Ⅰ）$x=g(t)$ とおく。

$$\int f(x)dx=\int f(x)\frac{dx}{dt}dt=\int f\big(g(t)\big)g'(t)dt$$

方法Ⅱ）$g(x)=t$ とおく。

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx=\int f(t)\frac{dt}{dx}dx=\int f(t)dt$$

○解答・解説

問 1

【方針】

区分求積法で極限を求めます。原則の基本形の式と問題から得られる式を比べると和が $2n$ まで足しているという点で違いがあり注意が必要です。

幅が $\frac{1}{n}$ の長方形 を $2n$ 個足しているので $\frac{1}{n}\times 2n=2$ から積分区間は $[0,\ 2]$ と考えます。

【解説】

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{n+\frac{2}{2}}+\frac{1}{n+\frac{3}{2}}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

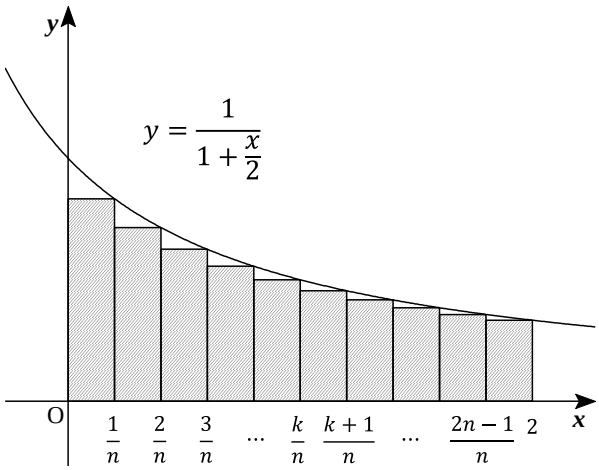
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+\frac{k}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)}$$

$$=\int_0^2\frac{1}{1+\frac{x}{2}}dx=2\int_0^2\frac{1}{x+2}dx$$

$$=2[\log|x+2|]_0^2$$

$$=2(\log 4-\log 2)=\underline{2\log 2}$$



-----参考-----

$N=2n$ とおいて原則の基本形に合わせます。

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{2n}}=\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{1+\frac{k}{N}}$$

より

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{n+\frac{2}{2}}+\frac{1}{n+\frac{3}{2}}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{1+\frac{k}{N}}$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = 2[\log|1+x|]_0^1 = \underline{2\log 2}$$

問 2

【方針】

問 1 と同様に、$2n$ 個の長方形を足しているので、積分区間は $[0,\ 2]$ と考えます。またk 番目の長方形の高さを、$f\left(\frac{k}{n}\right)$ や$f\left(\frac{k-1}{n}\right)$ で表すことができません。そこで、求めたい長方形の面積の和を$f\left(\frac{k}{n}\right)$ や $f\left(\frac{k-1}{n}\right)$ を用いたもので上側からと下側からではさみます。

【解説】

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{n+\frac{3}{2}}+\frac{1}{n+\frac{5}{2}}+\cdots+\frac{2}{6n-1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n+\frac{2k-1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1+\frac{2k-1}{2n}}$$

ここで

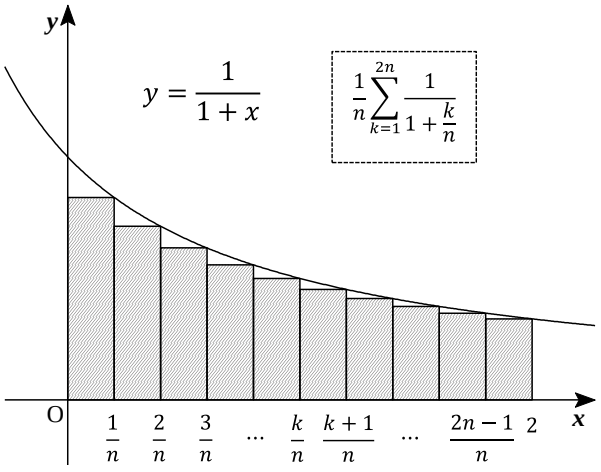
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{2k}{2n}} < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{2k-1}{2n}} < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{2(k-1)}{2n}}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{2k}{2n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{1+x}\,dx$$

$$= [\log|1+x|]_0^2 = \log 3$$

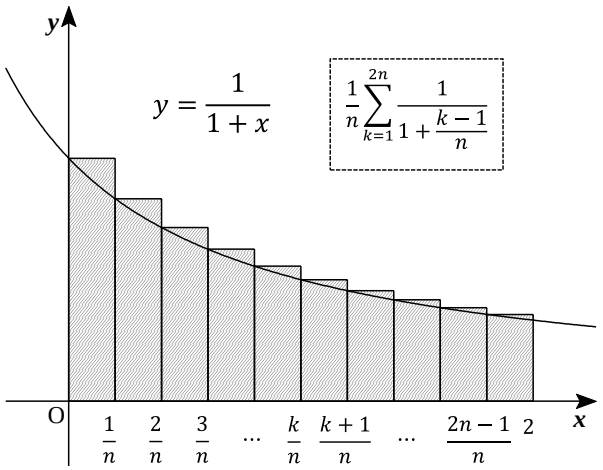


$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\dfrac{2(k-1)}{2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\dfrac{k-1}{n}}$$

$$=\int_0^2\frac{1}{1+x}dx$$

$$=[\log|1+x|]_0^2=\log 3$$



よって、はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\dfrac{2k-1}{2n}}=\underline{\log 3}$$

問 3

【方針】

与式のように n 個の項の積になっているときは、自然対数をとり、対数の性質から積を和に変換します。すると区分求積法の形になり、定積分で表せます。

この積分は三角関数と対数関数の積になっています。このように種類の違う関数の積を積分するときは、部分積分を行います。

その結果、三角関数の積分に帰着します。三角関数の積分は、置換積分を行うと分数関数の積分に帰着します。

分数関数の積分では、分子の次数を分母の次数より下げることから始めます。

【解説】

$$P_n=\left\{\left(1+\sin\frac{n\pi}{2n}\right)^{\sin\frac{n\pi}{n}}\left(1+\sin\frac{(n+1)\pi}{2n}\right)^{\sin\frac{(n+1)\pi}{n}}\left(1+\sin\frac{(n+2)\pi}{2n}\right)^{\sin\frac{(n+2)\pi}{n}}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots(1+\sin\pi)^{\sin 2\pi}\right\}^{\frac{1}{n}}\text{ とし}$$

$$a_k=\left(1+\sin\frac{(n+k)\pi}{2n}\right)^{\sin\frac{(n+k)\pi}{n}}\quad(k=0,1,2,\cdots)\text{とおくと}$$

$P_n=(a_0a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$ となります。

ここで

$$\log P_n = \log(a_0 a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log(a_0 a_1 a_2 \cdots a_n)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \log a_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \log\left(1+\sin\frac{(n+k)\pi}{2n}\right)^{\sin\frac{(n+k)\pi}{n}}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \sin\frac{(n+k)\pi}{n}\log\left(1+\sin\frac{(n+k)\pi}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\pi+\frac{k}{n}\pi\right)\log\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \left(-\sin\frac{k}{n}\pi\right)\log\left(1+\cos\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$\left(k=0 \text{ のとき } \sin\frac{0}{n}\pi = \sin 0 = 0 \text{ なので}\right)$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(-\sin\frac{k}{n}\pi\right)\log\left(1+\cos\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\log P_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(-\sin\frac{k}{n}\pi\right)\log\left(1+\cos\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \int_0^1 (-\sin\pi x)\log\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{\pi}\cos\pi x\cdot\log\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos\pi x\cdot\frac{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}{1+\cos\frac{\pi}{2}x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\log 2 + \frac{1}{2}\int_0^1 \cos\pi x\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{1+\cos\frac{\pi}{2}x}dx$$

ここで、$t=\cos\frac{\pi}{2}x$ とおくと、$\frac{dt}{dx} = -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$

x	0	→	1
t	1	→	0

$$\int_0^1 \cos\pi x\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{1+\cos\frac{\pi}{2}x}dx = \int_0^1 \left(2\cos^2\frac{\pi}{2}x-1\right)\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{1+\cos\frac{\pi}{2}x}dx$$

$$= \int_1^0 (2t^2-1)\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{1+t}\cdot\frac{1}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{2t^2-1}{1+t}dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{2(t^2-1)+1}{1+t}dt = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{2(t+1)(t-1)+1}{1+t}dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \left\{2(t-1)+\frac{1}{1+t}\right\}dt$$

$$= \frac{2}{\pi}[(t-1)^2+\log|1+t|]_0^1$$

$$= \frac{2}{\pi}(\log 2-1)$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\log P_n = -\frac{1}{\pi}\log 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi}(\log 2-1) = -\frac{1}{\pi}$$

従って

$$\lim_{n\to\infty} P_n = e^{-\frac{1}{\pi}}$$

③回転体の体積と極限

○原則

１．◆回転体の体積計算

Ⅰ）$y=f(x)$をx軸まわりに回転したとき

$$V=\int_a^b \pi\{f(x)\}^2dx$$

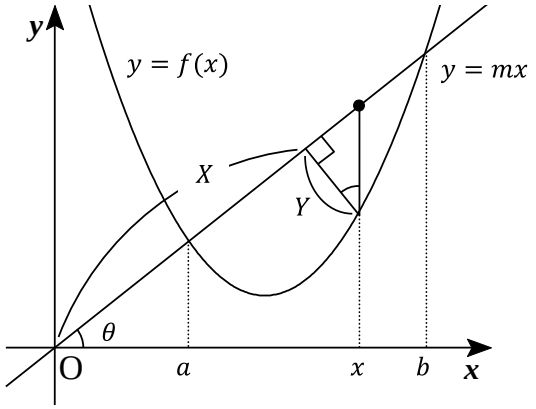
Ⅱ）$x=g(y)$をx軸まわりに回転したとき

$$V=\int_a^b \pi\{g(y)\}^2dy$$

２．◆ $y=mx$ 軸回りの回転体の体積計算

Ⅰ）図のように、曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=mx$ $(m=\tan\theta)$ が囲む図形を、$y=mx$ のまわりに回転して得られる立体の体積 V は

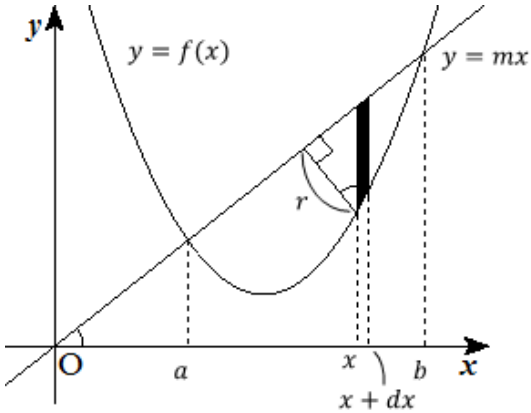
$$V = \int_a^b Y^2 \frac{dX}{dx} dx$$
$$= \pi \cos\theta \int_a^b \{mx - f(x)\}^2 \, dx$$



Ⅱ）傘型分割積分

右図において区間$[x,\ x+dx]$の部分を$y = mx$のまわりに回転させてできる立体は、傘のような形をしています。

この立体の体積を足し合わせて体積を求める方法です。



$$V = \int_a^b \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r dx$$
$$= \pi \cos\theta \int_a^b \{mx - f(x)\}^2 \, dx$$

○解答・解説

(1)

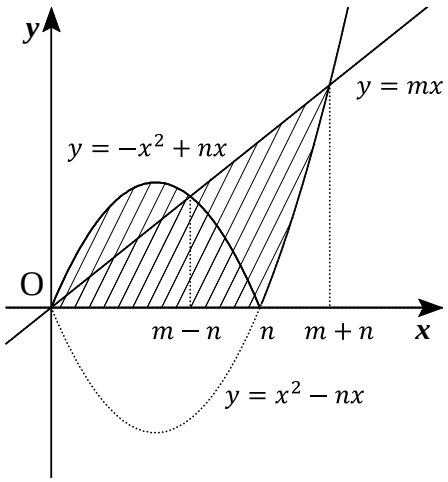
【方針】

原則に従い、x軸回りの回転体の体積を求めますが、回転する図形がx軸と重なっています。その場合は、図形をx軸で折り返したものを回転させます。

【解説】

回転する図形を確認します。

放物線$y = x^2 - nx$と直線 $y = mx$のグラフは図のようになります。回転軸とD_nが重なっているので、x軸より下側の部分をx軸で折り返した図の斜線部分を回転させればよいことになります。



$$V_n = \int_0^{n-m} \pi(-x^2 + nx)^2 \, dx$$

$$+\int_{n-m}^{n+m}\pi(mx)^2dx-\int_{n}^{n+m}(x^2-nx)^2dx$$

$$=\int_{0}^{n-m}\pi(x^4-2nx^3+n^2x^2)\,dx$$

$$+\int_{n-m}^{n+m}\pi m^2x^2dx-\int_{n}^{n+m}(x^4-2nx^3+n^2x^2)dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}nx^4+\frac{1}{3}n^2x^3\right]_0^{n-m}$$

$$+\pi\left[\frac{1}{3}m^2x^3\right]_{n-m}^{n+m}-\pi\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}nx^4+\frac{1}{3}n^2x^3\right]_n^{n+m}$$

$$=\pi\left\{\frac{1}{5}(n-m)^5-\frac{1}{2}n(n-m)^4+\frac{1}{3}n^2(n-m)^3\right\}$$

$$+\pi\left\{\frac{1}{3}m^2(n+m)^3-\frac{1}{3}m^2(n-m)^3\right\}$$

$$-\pi\left\{\frac{1}{5}(n+m)^5-\frac{1}{2}n(n+m)^4+\frac{1}{3}n^2(n+m)^3\right\}$$

$$+\pi\left\{\frac{1}{5}n^5-\frac{1}{2}nn^4+\frac{1}{3}n^2n^3\right\}$$

$$=\pi\left\{\frac{1}{5}(n-m)^5-\frac{1}{2}n(n-m)^4+\frac{1}{3}n^2(n-m)^3-\frac{1}{3}m^2(n-m)^3\right\}$$

$$-\pi\left\{\frac{1}{5}(n+m)^5-\frac{1}{2}n(n+m)^4+\frac{1}{3}n^2(n+m)^3-\frac{1}{3}m^2(n+m)^3\right\}$$

$$+\frac{\pi}{30}n^5$$

$$=\frac{\pi(n-m)^3}{30}\{6(n-m)^2-15n(n-m)+10n^2-10m^2\}$$

$$-\frac{\pi(n+m)^3}{30}\{6(n+m)^2-15n(n+m)+10n^2-10m^2\}$$

$$+\frac{\pi}{30}n^5$$

$$=\frac{\pi(n-m)^3}{30}\{n^2+3nm-4m^2\}-\frac{\pi(n+m)^3}{30}\{n^2-3nm-4m^2\}+\frac{\pi}{30}n^5$$

$$=\frac{\pi(n^2-4m^2)}{30}\{(n-m)^3-(n+m)^3\}+\frac{\pi\cdot 3nm}{30}\{(n-m)^3+(n+m)^3\}+\frac{\pi}{30}n^5$$

$$=\frac{\pi(n^2-4m^2)}{30}(-6n^2m-2m^3)+\frac{\pi\cdot 3nm}{30}(2n^3+6nm^2)+\frac{\pi}{30}n^5$$

$$=\frac{\pi m}{15}\{-(n^2-4m^2)(3n^2+m^2)+3n(n^3+3nm^2)\}+\frac{\pi}{30}n^5$$

$$= \frac{\pi m}{15}(20n^2m^2 + 4m^4) + \frac{\pi}{30}n^5 = \left(\frac{1}{30}n^5 + \frac{4}{3}n^2m^3 + \frac{4}{15}m^5\right)\pi$$

-----参考-----

上記解答は、5 乗の展開をさけ、因数分解を利用しました。
次では、二項定理を利用して累乗を展開し計算します。

$$(n-m)^5 = n^5 - 5n^4m + 10n^3m^2 - 10n^2m^3 + 5nm^4 - m^5$$
$$(n+m)^5 = n^5 + 5n^4m + 10n^3m^2 + 10n^2m^3 + 5nm^4 + m^5$$
$$(n-m)^5 - (n+m)^5 = -10n^4m - 20n^2m^3 - 2m^5$$
$$\frac{1}{5}\{(n-m)^5 - (n+m)^5\} = -2n^4m - 4n^2m^3 - \frac{2}{5}m^5$$

$$(n-m)^4 = n^4 - 4n^3m + 6n^2m^2 - 4nm^3 + m^4$$
$$(n+m)^4 = n^4 + 4n^3m + 6n^2m^2 + 4nm^3 + m^4$$
$$(n-m)^4 - (n+m)^4 = -8n^3m - 8nm^3$$
$$\frac{1}{2}\{(n-m)^4 - (n+m)^4\} = -4n^3m - 4nm^3$$

$$(n-m)^3 = n^3 - 3n^2m + 3nm^2 - m^3$$
$$(n+m)^3 = n^3 + 3n^2m + 3nm^2 + m^3$$
$$(n-m)^3 - (n+m)^3 = -6n^2m - 2m^3$$
$$\frac{1}{3}\{(n-m)^3 - (n+m)^3\} = -2n^2m - \frac{2}{3}m^3$$

これらを準備しておいて

$$\pi\left\{\frac{1}{5}(n-m)^5 - \frac{1}{2}n(n-m)^4 + \frac{1}{3}n^2(n-m)^3\right\}$$
$$+\pi\left\{\frac{1}{3}m^2(n+m)^3 - \frac{1}{3}m^2(n-m)^3\right\}$$
$$-\pi\left\{\frac{1}{5}(n+m)^5 - \frac{1}{2}n(n+m)^4 + \frac{1}{3}n^2(n+m)^3\right\}$$
$$+\pi\left\{\frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{2}nn^4 + \frac{1}{3}n^2n^3\right\}$$
$$= \frac{\pi}{5}\{(n-m)^5 - (n+m)^5\} - \frac{\pi n}{2}\{(n-m)^4 - (n+m)^4\}$$
$$+\frac{\pi n^2}{3}\{(n-m)^3 - (n+m)^3\} + \frac{\pi m^2}{3}\{(n+m)^3 - (n-m)^3\} + \frac{\pi}{30}n^5$$

$$= \pi\left(-2n^4m - 4n^2m^3 - \frac{2}{5}m^5\right) - \pi n(-4n^3m - 4nm^3)$$

$$+\pi n^2\left(-2n^2m - \frac{2}{3}m^3\right) - \pi m^2\left(-2n^2m - \frac{2}{3}m^3\right) + \frac{\pi}{30}n^5$$

$$= \underline{\left(\frac{1}{30}n^5 + \frac{4}{3}n^2m^3 + \frac{4}{15}m^5\right)\pi}$$

(2)

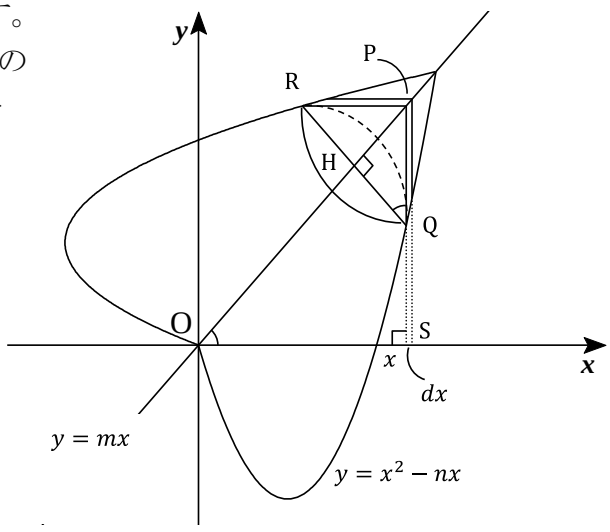
【方針】

原則Ⅱ）の傘型分割積分を利用して求めます。通常、回転体の体積は円の面積に厚みを掛けたものを足し合わせますが、この方法は、円すいの側面積に厚みを掛けたものを足し合わせます。

【解説】

直線 $y = mx$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ mx)$、
放物線 $y = x^2 - nx$ 上の点 $\mathrm{Q}(x,\ x^2 - nx)$ とします。

区間$[x,\ \Delta x]$ の部分を、直線 $y = mx$ のまわりに回転させてできる立体の体積をΔV とします。この立体は、傘のような形をしていて、その体積 ΔV は、円錐の側面積$S(x)$ に厚みΔx をかけたものと考えます。円錐の母線は PQ、底面の半径は QH です。

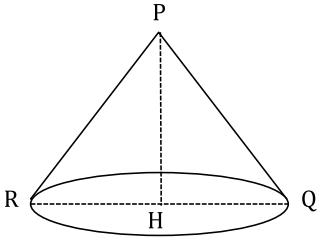


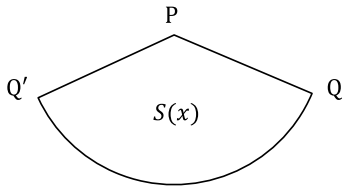
ここで $S(x)$ は扇形の面積なので

$$S(x) = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \mathrm{QH} \cdot \mathrm{PQ}$$

QH は、△PSO ∽ △PHQ より

$$\mathrm{OH} = \frac{\mathrm{OS}}{\mathrm{OP}} \cdot \mathrm{PQ} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \cdot \mathrm{PQ}$$





よって

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\frac{\mathrm{PQ}}{\sqrt{1+m^2}}\cdot \mathrm{PQ}=\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\mathrm{PQ}^2$$

体積 ΔV は、$S(x)$ に厚み Δx をかけたものなので

$$\Delta V=S(x)\cdot\Delta x$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta x}=\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\mathrm{PQ}^2$$

$\Delta x\to 0$ のとき

$$\frac{dV}{dx}=\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\mathrm{PQ}^2=\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\{mx-(x^2-nx)\}^2$$

よって

$$W_n=\int_0^{n+m}\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\cdot\{mx-(x^2-nx)\}^2\,dx$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\int_0^{n+m}\{-x^2+(n+m)x\}^2\,dx$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\int_0^{n+m}\{x^4-2(n+m)x^3+(n+m)^2x^2\}\,dx$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}(n+m)x^4+\frac{1}{3}(n+m)^2x^3\right]_0^{n+m}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\left\{\frac{1}{5}(n+m)^5-\frac{1}{2}(n+m)^5+\frac{1}{3}(n+m)^5\right\}$$

$$=\underline{\frac{\pi(n+m)^5}{30\sqrt{1+m^2}}}$$

[別解]

【方針】

原則のⅠ）を利用します。直線 $y=mx$ を t 軸とし、この t 軸に垂直な平面で立体を切ると、断面は円となるのでその円の面積を積分して体積を計算します。つまり先の解答の QH を使えば

$$\int_a^b\pi\mathrm{QH}^2dt$$

この問題では、回転体にくぼみがあるので、実際には

$$\int_a^b\pi\mathrm{QH}^2dt-\int_a^c\pi\mathrm{Q'H'}^2dt$$

のように全体から、くぼみの部分を引かなければいけません。

まず、積分区間$[a,\ b],[a,\ c]$ と断面の円の半径$\mathrm{QH},\ \mathrm{Q'H'}$ を求めます。その後の積分

計算は、x と t の関係を使って x で積分するように置換積分を行います。

【解説】

直線 $y=mx$ を t 軸とし、原点は O とします。この t 軸に沿った積分を使えば、断面は円となりその半径を使って回転体の体積が計算できます。

まず、積分区間を求めます。

直線 $y=mx$ 上の点 $\mathrm{S}(s,\ ms)$ を通り、$y=mx$ に垂直な直線

$$y=-\frac{1}{m}(x-s)+ms$$

が、放物線 $y=x^2-nx$ に接するとき

この直線と放物線の方程式を連立して

$$x^2-nx=-\frac{1}{m}(x-s)+ms$$

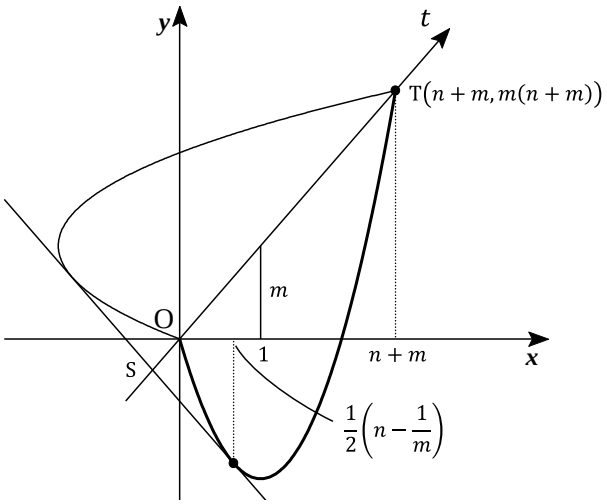
$$x^2-\left(n-\frac{1}{m}\right)x-\frac{s}{m}-ms=0$$

この 2 次方程式が重解を持てばよいので、判別式を D として

$$D=\left(n-\frac{1}{m}\right)^2+4\left(\frac{s}{m}+ms\right)=0$$

$$\left(n-\frac{1}{m}\right)^2+4\left(\frac{1+m^2}{m}\right)s=0$$

$$\mathrm{s}=\frac{-m}{4(1+m^2)}\left(n-\frac{1}{m}\right)^2$$



このときの重解は

$$x=\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{m}\right)$$

また、放物線 $y=x^2-nx$ と直線 $y=mx$ の 1 つの交点は原点 O であり、もう 1 つは $\mathrm{T}\left(n+m,\ m(n+m)\right)$ で

$$\mathrm{OT}=(n+m)\sqrt{1+m^2}$$

このことから、積分区間は $\left[s\sqrt{1+m^2},\ (n+m)\sqrt{1+m^2}\right]$ となり、

図より、引く部分は $\left[s\sqrt{1+m^2},\ 0\right]$ です。

次に断面の円の半径を計算します。

t 軸上に点 $\mathrm{H}(t)$ をとります。点 H から t 軸に垂直に引いた直線と放物線 $y=x^2-nx$ との交点を $\mathrm{Q}(x,\ x^2-nx)$ とし、点 P、V を$(x,\ mx)$, $V(x,\ 0)$ とします。

円の半径 QH は、$\triangle\mathrm{PQH}\ \backsim\ \triangle\mathrm{POV}$ より

$$\mathrm{QH}=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\mathrm{PQ}=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}(mx-x^2+nx)$$

ここで

$0<x<\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{m}\right)$ のときの QH をl_1、$\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{m}\right)<x<n+m$ のときの QH をl_2

とおくと求める体積は

$$W_n=\int_{s\sqrt{1+m^2}}^{(n+m)\sqrt{1+m^2}}\pi {l_2}^2dt-\int_{s\sqrt{1+m^2}}^{0}\pi {l_1}^2\,dt$$

で計算されます。

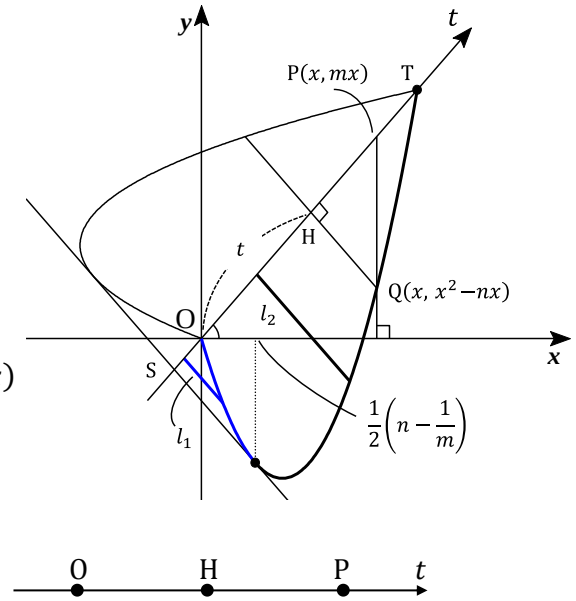
次に

$$\mathrm{HP}=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\mathrm{PQ}=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}(mx-x^2+nx)$$

と、数直線$(t$ 軸$)$上の 3 点 O、H、P において

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{HP}}$

が成立し、成分表示すると



$$\sqrt{1+m^2}x=t+\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\mathrm{PQ}=t+\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}(mx-x^2+nx)$$

$$t=\sqrt{1+m^2}x+\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}x^2-\frac{m^2+nm}{\sqrt{1+m^2}}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\{mx^2+(1-nm)x\}$$

これを用いて置換積分を行います。

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}(2mx+1-nm)$$

t	$s\sqrt{1+m^2}$	→	$(n+m)\sqrt{1+m^2}$
x	$\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{m}\right)$	→	$n+m$

t	$s\sqrt{1+m^2}$	→	0
x	$\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{m}\right)$	→	0

$$W_n=\int_{\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{m}\right)}^{n+m}\pi {l_2}^2\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}(2mx+1-nm)dx$$

$$-\int_{\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{m}\right)}^{0}\pi {l_1}^2\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}(2mx+1-nm)dx$$

$$=\int_0^{n+m}\pi\left\{\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}(mx-x^2+nx)\right\}^2\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}(2mx+1-nm)dx$$

$$=\frac{\pi}{(1+m^2)\sqrt{1+m^2}}\int_0^{n+m}\{x^2-(n+m)x\}^2\,(2mx+1-nm)dx$$

(ここで $2mx+1-nm=m\{2x-(n+m)\}+1+m^2$ として)

$$=\frac{\pi}{(1+m^2)\sqrt{1+m^2}}\int_0^{n+m}\{x^2-(n+m)x\}^2\,m\{2x-(n+m)\}dx$$
$$+\frac{\pi}{(1+m^2)\sqrt{1+m^2}}\int_0^{n+m}\{x^2-(n+m)x\}^2\,(1+m^2)dx$$

$$=\frac{\pi m}{(1+m^2)\sqrt{1+m^2}}\left[\frac{1}{3}\{x^2-(n+m)x\}^3\right]_0^{n+m}$$
$$+\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\int_0^{n+m}\{x^4-2(n+m)x^3+(n+m)^2x^2\}\,dx$$

$$=0+\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}(n+m)x^4+\frac{1}{3}(n+m)^2x^3\right]_0^{n+m}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\left\{\frac{1}{5}(n+m)^5-\frac{1}{2}(n+m)^5+\frac{1}{3}(n+m)^5\right\}$$

$$=\underline{\frac{\pi(n+m)^5}{30\sqrt{1+m^2}}}$$

(3)

【方針】

V_n と W_n はともに、n についての 5 次式です。分母分子を n^5 で割って極限を求めます。

【解説】

$$\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{W_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{30\sqrt{1+m^2}}{\pi(n+m)^5}\cdot\left(\frac{1}{30}n^5+\frac{4}{3}n^2m^3+\frac{4}{15}m^5\right)\pi$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{30\sqrt{1+m^2}}{(n+m)^5} \cdot \frac{n^5 + 40n^2m^3 + 8m^5}{30}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+m^2} \cdot \frac{n^5 + 40n^2m^3 + 8m^5}{(n+m)^5}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+m^2} \cdot \frac{1 + \frac{40m^3}{n^3} + \frac{8m^5}{n^5}}{\left(1+\frac{m}{n}\right)^5}$$

$$= \underline{\sqrt{1+m^2}}$$