東邦大学入試問題

2015年数学

解答・解説編

①2 次方程式とグラフ

○原則

１．◆解と係数の関係

Ⅰ）二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解をα, β とします。このとき

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

Ⅱ）2 数α, β に対して、$p=\alpha+\beta$, $q=\alpha\beta$ とすると

2 次方程式 $t^2-pt+q=0$ の 2 解は、α, β となります。

２．◆放物線と直線が共有点を持つ条件

放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線$y=mx+n$ があり、

2 次方程式 $ax^2+bx+c=mx+n$ の判別式をD とします。

放物線と直線が異なる 2 点で交わる $\Leftrightarrow \mathrm{D}>0$

放物線と直線が 1 点で交わる $\Leftrightarrow \mathrm{D}=0$

放物線と直線が交わらない $\Leftrightarrow \mathrm{D}<0$

○解答・解説

【方針】

2 点 A, B の座標を求めて、線分 AB の長さを計算します。このとき、A, B の x 座標をα, β とおいて解と係数の関係を使うと計算がし易いです。また、放物線と直線が異なる 2 点で交わるために、判別式が正になる条件も確認します。

【解説】

与えらえた放物線と直線の交点の座標を求めるために

$$\text{連立方程式}\begin{cases} y=x^2+6x+5 \\ y=2x+k \end{cases}$$

を解きます。y を消去して

$$x^2+6x+5=2x+k$$

$$x^2+4x+5-k=0\cdots①$$

異なる 2 点 A, B で交わるので、①の判別式をD とすると

$$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot(5-k)>0$$

$$k > 1 \cdots ②$$

また①の異なる２つの解を$\alpha,\ \beta$とおくと、2 点 A, B は

$$\mathrm{A}(\alpha,\ 2\alpha + k),\ \mathrm{B}(\beta,\ 2\beta + k)$$

また、解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = -4 \cdots ③,\ \ \alpha\beta = 5 - k \cdots ④$$

ここで、2 点 A, B の距離は

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= (\alpha - \beta)^2 + \{(2\alpha + k) - (2\beta + k)\}^2 \\ &= (\alpha - \beta)^2 + (2\alpha - 2\beta)^2 \\ &= 5(\alpha - \beta)^2 \\ &= 5\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\} \\ &= 5\{(-4)^2 - 4(5 - k)\} \quad (\because\ ③④) \\ &= 5(4k - 4)\end{aligned}$$

$\mathrm{AB} = 2\sqrt{2}$ より

$$5(4k - 4) = \left(2\sqrt{2}\right)^2$$

$$k - 1 = \frac{2}{5} \quad \therefore\ k = \frac{7}{5}$$

これは②を満たします。従って、$\underline{k = \frac{7}{5}}$

②数列

○原則

１．◆等差数列

数列$\{a_n\}$が等差数列であるとは、すべての自然数 n に対して

$$a_{n+1} - a_n = d\ (d：定数)$$

が成り立つときのことをいい、d を公差といいます。

◆等差数列の一般項

初項 a 、公差が d である等差数列$\{a_n\}$の一般項は

$$a_n = a + (n - 1)d$$

◆等差数列の和

初項 a 、公差が d である等差数列$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 Sは

$$S = \frac{1}{2}n(a + a_n) = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}$$

○解答・解説

【方針】

等差数列の初項a 、公差 d として、一般項をa, d で表します。与えられた条件から、a, d についての連立方程式をたて数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めます。

それにより、数列 $\{a_n\}$は初項が負で公差が正の等差数列であることが分かります。つまり、初項からしばらくは負の値が続き、あるところから正の値が続きます。このことから和の最小値は負の値をすべて足したときになります。

【解説】

等差数列$\{a_n\}$ の初項を a 、公差を d とします。このとき一般項は

$$a_n = a + (n-1)d \cdots ①$$

①より

$$a_{15} = a + 14d$$
$$a_{23} = a + 22d$$

また、条件から

$$a_{15} + a_{23} = 2a + 36d = -240$$
$$a + 18d = -120 \cdots ②$$

同様にして

$$a_{19} = a + 18d$$
$$a_{20} = a + 19d$$
$$a_{21} = a + 20d$$

条件より

$$a_{19} + a_{20} + a_{21} = 3a + 57d = -318$$
$$a + 19d = -106 \cdots ③$$

③－②より

$d = 14$　　∴ 公差 14

②に代入して　$a = -372$

従って、$a_n = -372 + (n-1) \cdot 14 = 14n - 386$

次に、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ が最小となる場合を考えます。等差数列$\{a_n\}$は-372から始まって14ずつ増えていく数列です。初項からしばらくは負の値が続き、どこかで負の値から正の値になり、その先はずっと正の値です。このことから、$a_n \leqq 0$である項の総和が最小となります。従って、何番目までが負の値かを調べればよいことになります。

$$a_n = 14n - 386 \leqq 0$$
$$n \leqq \frac{386}{14} = \frac{193}{7} = 27.57\cdots$$

nは自然数なので、次のことが分かります。

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{26} < a_{27} < 0 < a_{28} < a_{29} < \cdots$$

つまり、a_{27}までが負の値なので

和$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ が最小となるのは、$\underline{n = 27}$のときです。

③対数

○原則

１．◆常用対数の利用

正の数Nがn桁である。

$\Leftrightarrow 10^{n-1} \leqq N < 10^n$

$\Leftrightarrow n - 1 \leqq \log_{10} N < n$

２．◆対数の性質

$a, b, c > 0,\ \ a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0,\ \ M, N > 0$とする。

Ⅰ）$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$　　Ⅱ）$\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

Ⅲ）$\log_a M^k = k \log_a M$　　Ⅳ）$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

○解答・解説

【方針】

原則に従い、$\log_{10} 25^{25}$ を計算して$n-1 \leqq \log_{10} 25^{25} < n$ を満たすn を求めます。
$\log_{10} 25^{25}$ は対数の性質を利用して計算します。

【解説】
対数の性質を使って、$\log_{10} 25^{25}$ を計算します。

$$\begin{aligned}\log_{10} 25^{25} &= 25\log_{10} 25 = 50\log_{10} 5 \\ &= 50\log_{10}\frac{10}{2} = 50(\log_{10} 10 - \log_{10} 2) \\ &= 50(1-0.301) = 34.95\end{aligned}$$

よって

$$34 < \log_{10} 25^{25} < 35$$
$$10^{34} < 25^{25} < 10^{35}$$

従って、25^{25} は 35 桁の整数です。

④極限

○原則

1．◆関数の連続

関数$f(x)$ が $x=a$ で連続である

$\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

2．◆関数の極限

$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ というのは、右側極限も左側極限も共に存在し

α になることです。

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha \iff \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} f(x) = \alpha$$

3．◆$f(x) = x^n$ の極限

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} +\infty\ (x > 1) \\ 1\ (x = 1) \\ 0\ (|x| < 1) \\ 1 \text{ と } -1 \text{ とで振動 } (x = -1) \\ \text{振動 } (x < -1) \end{cases}$$

○解答・解説

【方針】

極限を計算して、$f(x)$ を求めます。その際、原則のような場合分けが生じます。$f(x)$ が実数全体で連続とするには、場合分けの継ぎ目で連続となるようにします。

【解説】

まず、極限を計算して $f(x)$ を定めます。

ｉ）$|x| > 1$ のとき

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{a + x^2 + x^{2n} - x^{2n+2}}{12 + x^{2n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a}{x^{2n}} + \frac{1}{x^{2n-2}} + 1 - x^2}{\frac{12}{x^{2n}} + 1} = 1 - x^2$$

ⅱ）$|x| = 1$ のとき

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{a + x^2 + x^{2n} - x^{2n+2}}{12 + x^{2n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a + (\pm 1)^2 + \{(\pm 1)^2\}^n - \{(\pm 1)^2\}^{n+1}}{12 + \{(\pm 1)^2\}^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a + 1 + 1 - 1}{12 + 1} = \frac{a + 1}{13}$$

ⅲ）$|x| < 1$ のとき

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{a + x^2 + x^{2n} - x^{2n+2}}{12 + x^{2n}}$$
$$= \frac{a + x^2}{12}$$

ｉ）ⅱ）ⅲ）より

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2 & (x>1)\\ \dfrac{a+1}{13} & (x=1)\\ \dfrac{a+x^2}{12} & (|x|<1)\\ \dfrac{a+1}{13} & (x=-1)\\ 1-x^2 & (x<-1)\end{cases}$$

$1-x^2$, $\dfrac{a+x^2}{12}$ は、すべての実数 x で連続なので

$x>1$, $|x|<1$, $x<-1$ のとき $f(x)$ は連続です。

よって、$x=\pm 1$ のときに連続となるように実数 a の値を求めます。

$x=1$ のとき $f(x)$ が連続となるには、

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1-0} f(x)=f(1)$$

が成立すればよいので

$$\lim_{x\to 1+0}(1-x^2)=0,\quad \lim_{x\to 1-0}\frac{a+x^2}{12}=\frac{a+1}{12},\quad f(1)=\frac{a+1}{13}$$

より

$$0=\frac{a+1}{12}=\frac{a+1}{13}$$

これを満たすのは、$a=-1$ のときです。

同様に、$x=-1$ のとき $f(x)$ が連続となるには、

$$\lim_{x\to -1+0} f(x)=\lim_{x\to -1-0} f(x)=f(-1)$$

が成立すればよいので

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{a+x^2}{12}=\frac{a+1}{12},\quad \lim_{x\to -1-0}(1-x^2)=0,\quad f(-1)=\frac{a+1}{13}$$

より

$$\frac{a+1}{12}=0=\frac{a+1}{13}$$

これを満たすのは、$a=-1$ のとき。

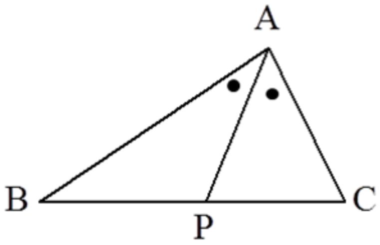
以上より、$\underline{a=-1}$ のとき関数$f(x)$ はすべての実数 x で連続となります。

⑤平面図形

○原則

1．◆角の 2 等分線と比

△ABC の∠A の 2 等分線と辺 BC との交点 P は、辺 BC を AB : AC に内分します。



2．◆三角関数　3 倍角の公式

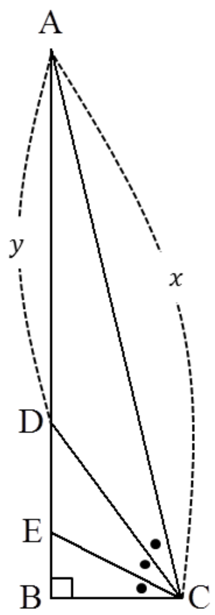
$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 4\cos\theta$$

○解答・解説

【方針】

$\mathrm{AC}=x,\ \mathrm{AD}=y$ とします。△ACE において∠ACE の二等分線が CD なので、原則より$x:\mathrm{CE}=y:\mathrm{DE}$ です。また CE と DE の長さは、△CDB において∠BCD の二等分線が CE であることから求まります。これで、x, y に関する方程式が 1 つたちます。次に、△ABC は直角三角形なので、三平方の定理からx, y についての方程式がもう 1 つたてられます。これらを連立して AC の長さを求めます。



【解説】

$\mathrm{AC}=x,\ \mathrm{AD}=y$ とします。△ABC で三平方の定理から

$$2^2+\left(y+\frac{8}{3}\right)^2=x^2 \cdots ①$$

また、△CAE で、CD は∠ACE の 2 等分線なので

$$x:\mathrm{CE}=y:\mathrm{DE} \cdots ②$$

次に、CE, DE を求めます。

△CDB において三平方の定理から

$$\mathrm{CD}^2=2^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2=\frac{100}{9}$$

$\mathrm{CD}>0$ より、$\mathrm{CD}=\dfrac{10}{3}$

また、CE は∠BCD の 2 等分線なので

$$\mathrm{DE} : \mathrm{EB} = \mathrm{CD} : \mathrm{CB} = \frac{10}{3} : 2 = 5 : 3$$

よって

$$\mathrm{DE} = \frac{5}{8}\mathrm{DB} = \frac{5}{8}\cdot\frac{8}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\mathrm{EB} = \frac{3}{8}\mathrm{DB} = \frac{3}{8}\cdot\frac{8}{3} = 1$$

△EBC において三平方の定理から

$$\mathrm{EC}^2 = 1^2 + 2^2 = 5 \quad \therefore \quad \mathrm{EC} = \sqrt{5}$$

$\mathrm{CD} = \dfrac{10}{3}$,　　$\mathrm{EC} = \sqrt{5}$ を②に代入して

$$x : \sqrt{5} = y : \frac{5}{3}$$

$$\frac{5}{3}x = \sqrt{5}y$$

$$\sqrt{5}x = 3y \cdots ③$$

①③より

$$2^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}x + \frac{8}{3}\right)^2 = x^2$$

$$36 + 5x^2 + 16\sqrt{5}x + 64 = 9x^2$$

$$4x^2 - 16\sqrt{5}x - 100 = 0$$

$$x^2 - 4\sqrt{5}x - 25 = 0$$

$$\left(x - 5\sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right) = 0$$

$$x = 5\sqrt{5}, -\sqrt{5}$$

$x > 0$ より $x = 5\sqrt{5}$

よって、$\mathrm{AC} = \underline{5\sqrt{5}}$

[別解]

【方針】

Δ ABC で、$\mathrm{AC} = \dfrac{\mathrm{BC}}{\cos\angle\mathrm{ACB}}$ なので、$\cos\angle\mathrm{ACB}$ の値を求めることを考えます。

$\angle\mathrm{BCE} = \alpha$ とおくと、$\cos\angle\mathrm{ACB} = \cos 3\alpha$ であり△DBC から $\cos 2\alpha$ が計算できます。

あとは、3 倍角の公式、2 倍角の公式を利用して$\cos 3\alpha$ の値を求めます。

【解説】

$\angle \mathrm{BCE} = \alpha\ (0 < \alpha < 90°)$ とします。

$\triangle \mathrm{DBC}$ で三平方の定理から

$$\mathrm{CD}^2 = 2^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{100}{9}$$

$\mathrm{CD} > 0$ より、$\mathrm{CD} = \dfrac{10}{3}$

よって、$\cos \angle \mathrm{DCB} = \cos 2\alpha = \dfrac{2}{\frac{10}{3}} = \dfrac{3}{5}$

2 倍角の公式から、$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$

$$\cos^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2} = \frac{\frac{3}{5} + 1}{2} = \frac{4}{5}$$

$\cos \alpha > 0$ より

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdots ③$$

また、3 倍角の公式から

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \\ &= \cos \alpha\,(4\cos^2 \alpha - 3) \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \left(4 \cdot \frac{4}{5} - 3\right) = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5\sqrt{5}}\end{aligned}$$

次に$\triangle \mathrm{ABC}$ で

$$\mathrm{AC} = \frac{\mathrm{BC}}{\cos \angle \mathrm{ACB}} = \frac{2}{\cos 3\alpha} = \frac{2}{\frac{2}{5\sqrt{5}}} = \underline{5\sqrt{5}}$$

⑥確率

○原則

1．◆条件付き確率

事象 A が起きたときに、事象 B が起こる確率$P_A(B)$ は

$$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

○解答・解説

【方針】

（前半）「病気にかかっていると判定される」のは、「病気にかかっていて」そう判定される場合と「病気にかかっていなくて」判定される場合とがあります。それぞれの確率を求めて、和をとります。

（後半）条件付き確率の問題です。条件付き確率かそうでないかは、試行が終わっているかいないかで判断できます。この問題では、「病気にかかっていると判定されたときに」とあるので、集団の中から 1 人選ぶという試行は終わっていて、選ばれた人は病気にかかっていると判定されました。よって、条件付き確率と考えます。そして、問われているのは「病気にかかっていると判定された」人たちの中で「病気にかかっていない」人たちはどれくらいの割合ですか、ということです。

【解説】

事象 A :「病気にかかっている」

事象 B :「病気にかかっていると判定される」とします。

条件から

病気にかかっている人が、病気にかかっていないと誤って判定される確率

$$P_A(\bar{B}) = \frac{1}{4}$$

なので

病気にかかっている人が、病気にかかっていると正しく判定される確率

$$P_A(B) = 1 - P_A(\bar{B}) = \frac{3}{4}$$

また、

病気にかかっていない人が、病気にかかっていると誤って判定される確率

$$P_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{13}$$

より

病気にかかっていない人が、病気にかかっていないと正しく判定される確率

$$P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - P_{\bar{A}}(B) = \frac{12}{13}$$

さらに

病気にかかっている確率 $P(A) = \dfrac{1}{14}$

病気にかかっていない確率 $P(\bar{A}) = 1 - \dfrac{1}{14} = \dfrac{13}{14}$

よって、病気であると判定される確率 $P(B)$ は

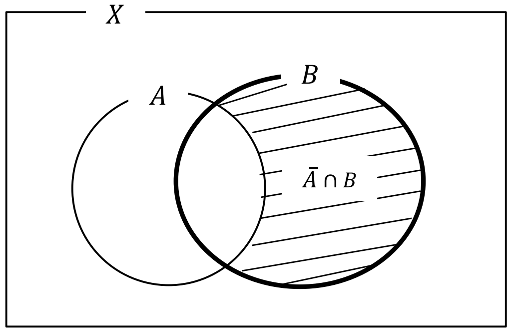
$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap \mathrm{B}) \\ &= P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B) \\ &= \frac{1}{14} \cdot \frac{3}{4} + \frac{13}{14} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{14} \cdot \left(\frac{3}{4} + 1\right) = \frac{1}{14} \cdot \frac{7}{4} = \underline{\frac{1}{8}} \end{aligned}$$

次に

病気にかかっていると判定されたときに実際には病気にかかっていない確率 $P_B(\bar{A})$ は

$$P_B(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{13}{14} \cdot \frac{1}{13}}{\frac{1}{8}} = \underline{\frac{4}{7}}$$

ベン図でみると、求める確率は B 全体のうち $\bar{A} \cap B$ のしめる割合です。



⑦微分

○原則

1． ◆極値

Ⅰ） $x = a$ で極大

$x = a$ を含む十分に小さい区間で、$f(x) < f(a)\ (x \neq a)$ のとき $x = a$ で極大といい、$f(a)$ を極大値といいます。

Ⅱ） $x = a$ で極小

$x = a$ を含む十分に小さい区間で、$f(x) > f(a)\ (x \neq a)$ のとき $x = a$ で極小といい、$f(a)$ を極小値といいます。

2． ◆極値であるための必要条件

関数 $y = f(x)$ において $x = a$ で極値をとるならば、$f'(a) = 0$

3． ◆合成関数の微分

$y = f(u)$，$u = g(x)$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

４．◆対数微分

関数 $y = f(x)$ が微分可能のとき、$f(x) \neq 0$ となる x の範囲で$\log|f(x)|$ も微分可能で

$$\frac{d}{dx}\log|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

〇解答・解説

【方針】

$f'(x)$ を求めて、増減表を書きます。まず、$f'(x) = 0$ となる x の値を求め、その前後で$f'(x)$ の正負を調べます。

【解説】

$$f(x) = (e^x)^{e^x} = e^{xe^x}$$

合成関数の微分から

$$f'(x) = (e^x + xe^x)e^{xe^x}$$
$$= (1+x)e^x \cdot e^{xe^x} = (1+x)(e^x)^{e^x+1}$$

$(e^x)^{e^x+1} > 0$ より$f'(x) = 0$ となるのは

$$1 + x = 0$$
$$\therefore \quad x = -1$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗

増減表より、$\underline{x = 1}$ のとき極小値をとります。

-----参考--

$f(x)$ を微分するときに、次のように対数微分を用いることもできます。

$$f(x) = (e^x)^{e^x}$$

$(e^x)^{e^x} > 0$ より、自然対数をとって

$$\log f(x) = \log(e^x)^{e^x} = e^x \log e^x = xe^x$$

両辺 x で微分すると

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = e^x + xe^x = (1+x)e^x$$
$$f'(x) = (1+x)e^x f(x)$$
$$= (1+x)(e^x)^{e^x+1}$$

⑧複素数

○原則

１．◆ド・モアブルの定理

整数 n に対して

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

○解答・解説

【方針】

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^{104}$ の計算は、ド・モアブルの定理を利用します。そのために

$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ を極形式で表して定理を使用します。x についての 1 次方程式となるのでそれを解きます。

【解説】

$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ を極形式で表して

$$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

ド・モアブルの定理から

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^{104} &= \left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}^{104} \\
&= \cos 104\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin 104\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \cos\left(-\frac{52\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{52\pi}{3}\right) \\
&= \cos\left(-18\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-18\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \\
&= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}$$

従って、

$$\left(1-\frac{i}{2}\right)x - 8 + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^{104} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\frac{2-i}{2}x=\frac{15}{2}$$

$$x=\frac{15}{2-i}=\frac{15(2+i)}{5}=3(2+i)$$
$$=\underline{6+3i}$$

⑨ベクトル

○原則

１．◆ベクトルの演算

和　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$　　差　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

演算法則

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$　　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

$k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$　$(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$　$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$　(k,l は実数)

○解答・解説

【方針】

$\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ を$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ で表したいのですが、始点が B であることに着目して、与えられた条件の始点も B に揃えます。得られる式から$\overrightarrow{\mathrm{BE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ だけの式にします。

【解説】

与えられた条件の始点を B に揃えます。

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{BE}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{BD}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{BD}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}})\cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{CF}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{3}{5}(\overrightarrow{\mathrm{BF}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdots②$$

また

$$\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BE}}\cdots③$$

③を②に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BE}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{BE}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdots④$$

④を①に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{BE}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right)$$

$$10\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\overrightarrow{\mathrm{BE}}+2\overrightarrow{\mathrm{BC}}+5\overrightarrow{\mathrm{BA}}$$

$$\underline{\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{BC}}}$$

⑩データ

○原則

１．◆平均値・分散

変量 x についての n 個のデータの値が、$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ であるとき

平均値　$\bar{x}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_i$　　分散　$s^2=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

○解答・解説

【方針】

$\displaystyle\sum_{i=1}^{9}(x_i-\theta)^2$ は θ についての 2 次関数となるので、頂点で最少となります。

この 2 次関数は下に凸なので、頂点で極小をとります。極小をとる θ の値を求めるために、微分していきます。

次に、$\displaystyle\sum_{i=1}^{9}|x_i-\theta|$ は絶対値をはずさないと進みません。場合分けをして絶対値をとります。1 次関数が現れるので、それらから最小となる θ をみつけます。

【解説】

$$f(\theta)=\sum_{i=1}^{9}(x_i-\theta)^2=\sum_{i=1}^{9}(\theta-x_i)^2$$ とします。

$f(\theta)$ はθ についての 2 次関数です。

$$f'(\theta)=\sum_{i=1}^{9}2(\theta-x_i)=2\left(9\theta-\sum_{i=1}^{9}x_i\right)$$

$f'(\theta)=0$ となるのは、

$$9\theta-\sum_{i=1}^{9}x_i=0$$ のとき、すなわち $$\theta=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}x_i=\bar{x}$$

$f(\theta)$ は下に凸の 2 次関数であり、$\theta=\bar{x}$ は軸の方程式となるので

$\theta=\bar{x}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}x_i$ のとき最小値をとります。

ここで、$\bar{x}$ を計算しますが、データの中央値 70 を基準にして求めると、数が大きくならないので計算がし易いです。つまり

$$\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}x_i=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}(x_i-70+70)=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}(x_i-70)+\frac{1}{9}\cdot 9\cdot 70$$

$$=\frac{-5+13-6-1+19-2+7+0+11}{9}+70$$

$$=\frac{36}{9}+70=74$$

よって、$\underline{\theta=74}$ のとき最小値をとります。

次に、$g(\theta)=\sum_{i=1}^{9}|x_i-\theta|=\sum_{i=1}^{9}|\theta-x_i|$ とおきます。

$$g(\theta)=|\theta-64|+|\theta-65|+|\theta-68|+|\theta-69|+|\theta-70|$$
$$+|\theta-77|+|\theta-81|+|\theta-83|+|\theta-89|$$

θ について場合分けして、絶対値をはずしていきます。

$\theta\leqq 64$ のとき　$f(\theta)=-9\theta+666$
$64\leqq\theta\leqq 65$ のとき　$f(\theta)=-7\theta+538$
$65\leqq\theta\leqq 68$ のとき　$f(\theta)=-5\theta+408$
$68\leqq\theta\leqq 69$ のとき　$f(\theta)=-3\theta+272$

$69 \leqq \theta \leqq 70$ のとき　$f(\theta) = -\theta + 134$
$70 \leqq \theta \leqq 77$ のとき　$f(\theta) = \theta - 6$
$77 \leqq \theta \leqq 81$ のとき　$f(\theta) = 3\theta - 160$
$81 \leqq \theta \leqq 83$ のとき　$f(\theta) = 5\theta - 332$
$83 \leqq \theta \leqq 89$ のとき　$f(\theta) = 7\theta - 488$
$89 \leqq \theta$ のとき　$f(\theta) = 9\theta - 666$

以上から、$\theta \leqq 70$ のとき$f(\theta)$ は減少関数で、$\theta \geqq 70$ のとき増加関数となるので$f(\theta)$ は、$\underline{\theta = 70}$ のとき最小値をとる。

⑪指数関数

○原則

１．◆指数法則

$a > 0,\ \ b > 0,\ \ r, s$は有理数とする。

Ⅰ）$a^r a^s = a^{r+s}$　Ⅱ）$(a^r)^s = a^{rs}$　Ⅲ）$(ab)^r = a^r b^r$

◆相加平均・相乗平均の関係

$a > 0, b > 0$ として

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}\quad (\text{等号成立は、}a = b\text{ のとき})$$

○解答・解説

【方針】

相加平均・相乗平均の関係を使って最大値・最小値を求めるときは、相乗平均が定数で表せることがポイントです。特に指数関数において、$3^x + 3^{-x}$ といった場合は、$\dfrac{3^x + 3^{-x}}{2} \geqq \sqrt{3^x \cdot 3^{-x}} = \sqrt{3^0} = 1$ のように相加平均・相乗平均の関係が使えます。

この問題では、$3^{2x}, 3^{-2x}$ や$3^y,\ 3^{-y}$ のような式が見えるので相加平均・相乗平均の関係が使えないか考えます。そこで、$X = 3^x,\ Y = 3^y$ として$f(x, y)$を変形してみます。

【解説】

$X = 3^x,\ \ Y = 3^y$ とおきます。

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 9^{x+1}3^y + 3^{2x-y} + 3^{y+3}9^{-x} + 3^{1-2x-y} \\ &= 9 \cdot 3^{2x}3^y + 3^{2x}3^{-y} + 27 \cdot 3^y 3^{-2x} + 3 \cdot 3^{-2x}3^{-y} \end{aligned}$$

$$= 9X^2Y + X^2Y^{-1} + 27X^{-2}Y + 3X^{-2}Y^{-1}$$
$$= X^2\left(9Y + \frac{1}{Y}\right) + 3X^{-2}\left(9Y + \frac{1}{Y}\right)$$
$$= \left(X^2 + \frac{3}{X^2}\right)\left(9Y + \frac{1}{Y}\right)$$

ここで、$X^2 > 0,\ Y > 0$ より相加平均・相乗平均の関係から

$$X^2 + \frac{3}{X^2} \geqq 2\sqrt{X^2 \cdot \frac{3}{X^2}} = 2\sqrt{3}$$

$$9Y + \frac{1}{Y} \geqq 2\sqrt{9Y \cdot \frac{1}{Y}} = 3$$

よって

$$f(x, y) \geqq 2\sqrt{3} \cdot 3 = 6\sqrt{3}$$

等号成立は

$X^2 = \dfrac{3}{X^2}$ かつ $9Y = \dfrac{1}{Y}$

$X^4 = 3, Y^2 = \dfrac{1}{9}$

$X > 0, Y > 0$ より $X = 3^{\frac{1}{4}} = 3^x,\qquad Y = \dfrac{1}{3} = 3^y$

従って

$x = \dfrac{1}{4},\ \ y = -1$ のとき最小値 $\underline{6\sqrt{3}}$

⑫立体の体積

○原則

１．◆立体の体積計算(非回転体)

立体の体積を計算するには、次のような計算をします。

ｉ）立体を、z 軸に垂直な平面 $z = t$ で切ります。(もしくはx 軸、y 軸)

ⅱ）切り口の面積$S(t)$ を求めます。

ⅲ） t について立体が$a \leqq t \leqq b$ にあるとき、立体の体積V は

$$V = \int_a^b S(t)dt$$

どの軸に垂直な平面で切るかは、問題によります。断面積$S(t)$ の求めやすいところで切ります。

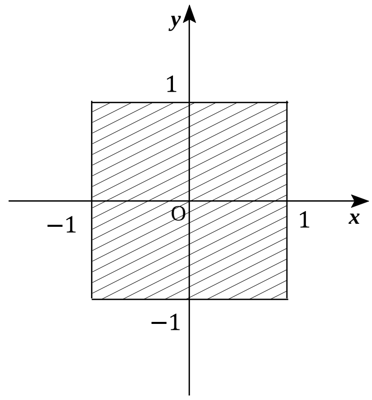
○解答・解説

【方針】

直交する円柱の共通部分の体積を求める問題です。z 軸に垂直な平面$z = t$ で切って、断面積 $S(t)$ を求めます。この問題では、断面は正方形となります。

【解説】

連立不等式　$|x| \leqq 1, |y| \leqq 1$で表される領域は、右図の境界線を含む網掛け部分となります。

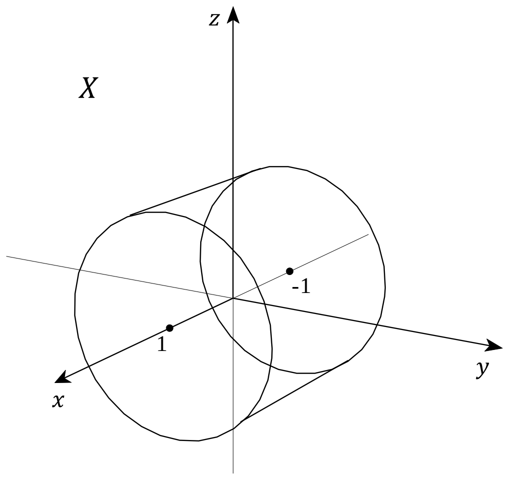


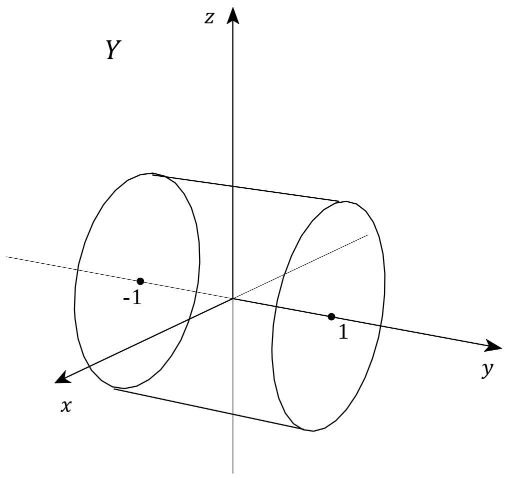
この領域を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体 X は円柱となり

$$X = \{(x, y, z) | y^2 + z^2 \leqq 1,\ \ -1 \leqq x \leqq 1\}$$

同様に、y 軸のまわりに 1 回転してできる立体 Y も円柱となり

$$Y = \{(x, y, z) | x^2 + z^2 \leqq 1,\ \ -1 \leqq y \leqq 1\}$$





Xと Yの共通部分の立体を $z = t\ (-1 \leqq t \leqq 1)$ で切ると断面は

$$X \cap Y = \{(x, y, t) | y^2 + t^2 \leqq 1,\ \ x^2 + t^2 \leqq 1,\ \ -1 \leqq x \leqq 1,\ \ -1 \leqq y \leqq 1\}$$

$$= \left\{(x, y, t) | -\sqrt{1 - t^2} \leqq y \leqq \sqrt{1 - t^2},\ \ -\sqrt{1 - t^2} \leqq x \leqq \sqrt{1 - t^2}\right\}$$

よって、右図のような正方形の周と内部になります。

断面積を $S(t)$ とおくと

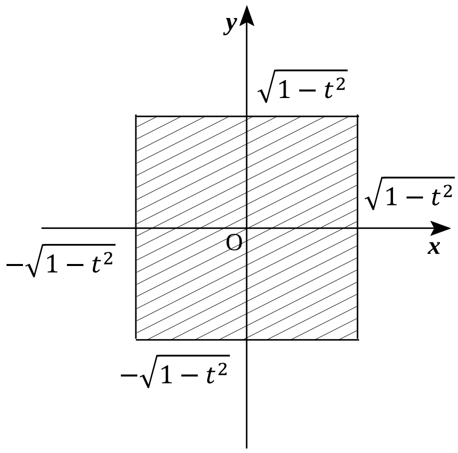
$$S(t) = \left(2\sqrt{1-t^2}\right)^2 = 4(1-t^2)$$

従って、求める体積 Vは

$$V = \int_{-1}^{1} S(t)dt = \int_{-1}^{1} 4(1-t^2)dt$$

$$= 2\int_{0}^{1} 4(1-t^2)dt = 8\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1$$

$$= 8\left(1-\frac{1}{3}\right) = \underline{\frac{16}{3}}$$



⑬空間ベクトル

○原則

１． ◆同じ平面上の点

一直線上にない 3 点 $\mathrm{A}(\vec{a}), \mathrm{B}(\vec{b}), \mathrm{C}(\vec{c})$ と点$\mathrm{P}(\vec{p})$ に対して

点 P が平面 ABC 上にある

$\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数s, t が存在する。

$\Leftrightarrow$

$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c},\ \ s+t+u=1$ となる実数s, t, u が存在する。

◆平面への垂線の足

点 O から平面 ABC におろした垂線の足を H とする。このとき

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

◆2 つのベクトルの直交条件

$$\vec{a} \perp \vec{b}\ \left(\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}\right) \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

○解答・解説

【方針】

原点Oから平面αに下した垂線の足をHとすると求める距離は$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$となります。Hの座標を求めるために、点Hが平面$\alpha$上にあること、$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$かつ$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PR}}$となることを利用します。後半は、まず点Hと円$C$上の点Sの距離が最大になるときを求めます。それには内積を計算していきます。

【解説】

原点Oから平面αに下した垂線の足をHとします。求める原点Oと平面αとの距離は、$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$となります。そこでHの座標を求めていきます。

点Hは平面α上にあるので、s, t, uを実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \mathrm{s}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + u\overrightarrow{\mathrm{OR}} \quad (\mathrm{s} + \mathrm{t} + \mathrm{u} = 1 \cdots ①)$$

と表せます。各ベクトルを成分表示して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= s(1, -2, 0) + t(0, -2, 2) + u(2, 0, 2)\\ &= (s + 2u, -2s - 2t, 2t + 2u)\end{aligned}$$

また、$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$と平面$\alpha$は垂直なので

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$かつ$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{QR}}$

$\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 0$かつ$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QR}} = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$と垂直なベクトルに$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}, \overrightarrow{\mathrm{QR}}$を選んだ理由は、それらを成分表示したときに 0 成分が現れ、その分内積の計算が易しくなるからです。

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (-1, 0, 2)$, $\overrightarrow{\mathrm{QR}} = (2, 2, 0)$より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= (s + 2u, -2s - 2t, 2t + 2u) \cdot (-1, 0, 2)\\ &= -s - 2u + 4t + 4u = -s + 4t + 2u = 0 \cdots ②\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QR}} &= (s + 2u, -2s - 2t, 2t + 2u) \cdot (2, 2, 0)\\ &= 2(s + 2u - 2s - 2t) = 2(-s - 2t + 2u) = 0\end{aligned}$$

$$-s - 2t + 2u = 0 \cdots ③$$

①②③より

$$s = \frac{2}{3},\ t = 0,\ u = \frac{1}{3}$$

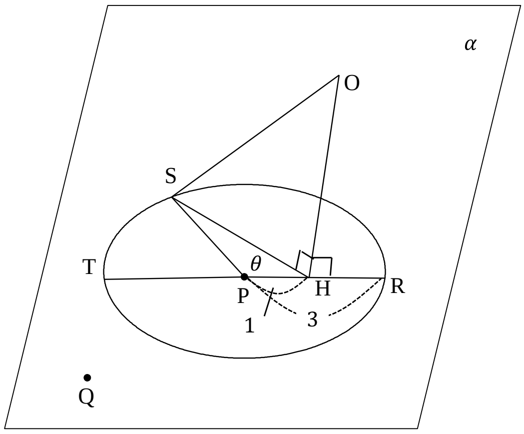
よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) \qquad |\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = 2$$

よって、原点Oと平面αとの距離は2となります。

次に、円C上の点をSとします。

△OHSで、三平方の定理から



$$\mathrm{OS}^2 = \mathrm{HS}^2 + \mathrm{OH}^2 = \mathrm{HS}^2 + 4 \cdots ④$$

OS が最大となるのは、HS が最大となるときです。

$$\mathrm{HS}^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{HS}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{PS}} - \overrightarrow{\mathrm{PH}}\right|^2$$

$$= \left|\overrightarrow{\mathrm{PS}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{PH}}\right|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{PS}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PH}}$$

ここで、点 P は円C の半径なので、

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PS}}\right|^2 = 3^2 = 9$$

また、$\overrightarrow{\mathrm{PH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ より、$\left|\overrightarrow{\mathrm{PH}}\right|^2 = 1$

よって

$$\mathrm{HS}^2 = 9 + 1 - 2\overrightarrow{\mathrm{PS}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PH}}$$
$$= 10 - 2\left|\overrightarrow{\mathrm{PS}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{PH}}\right| \cos\theta = 10 - 6\cos\theta$$

ただし、θ は$\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ と$\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ のなす角を表し、$0 \leqq \theta < 2\pi$

従って、

$$\mathrm{HS}^2 \leqq 10 + 6 = 16 \quad (\text{等号成立は、}\theta = \pi \text{ のとき})$$

ゆえに

$$\mathrm{OS}^2 \leqq 16 + 4 = 20$$

図の点 T のとき最大となります。

$\mathrm{OS} > 0$ より、$\mathrm{OS} \leqq 2\sqrt{5}$　∴ 最大値 $2\sqrt{5}$

⑭定積分

○原則

1．◆置換積分

方法 I) $x = g(t)$ とおく。

$$\int f(x)dx = \int f(x)\frac{dx}{dt}dt = \int f\big(g(t)\big)g'(t)dt$$

方法Ⅱ) $g(x) = t$ とおく。

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int f(t)\frac{dt}{dx}dx = \int f(t)dt$$

○解答・解説

【方針】

$t=2^x$ と置いて置換積分をしてもうまく計算できません。$t=-x$ と置いて置換積分を行います。

【解説】

$I=\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{x^2\cdot 2^{-x}}{2^x+2^{-x}}dx$ とおきます。

$t=-x$ として置換積分を行うと

$\dfrac{dx}{dt}=-1,$

x	-2	$\rightarrow$	2
t	2	$\rightarrow$	-2

$$
\begin{aligned}
I&=\int_{-2}^{2}\frac{x^2\cdot 2^{-x}}{2^x+2^{-x}}dx=\int_{2}^{-2}\frac{(-t)^2\cdot 2^{t}}{2^{-t}+2^{t}}(-dt)\\
&=\int_{-2}^{2}\frac{t^2\cdot 2^{t}}{2^t+2^{-t}}dt=\int_{-2}^{2}\frac{x^2\cdot 2^{x}}{2^x+2^{-x}}dx
\end{aligned}
$$

従って、

$$
\begin{aligned}
2I&=\int_{-2}^{2}\frac{x^2\cdot 2^{-x}}{2^x+2^{-x}}dx+\int_{-2}^{2}\frac{x^2\cdot 2^{x}}{2^x+2^{-x}}dx\\
&=\int_{-2}^{2}\frac{x^2\cdot(2^x+2^{-x})}{2^x+2^{-x}}dx=\int_{-2}^{2}x^2dx\\
&=2\int_{0}^{2}x^2\,dx=2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2\\
&=2\cdot\frac{8}{3}\qquad\therefore\quad \underline{I=\frac{8}{3}}
\end{aligned}
$$

⑮3 次方程式

○原則

1．◆因数定理

1 次式 $x-a$ が整式 $P(x)$ の因数である。

$\Longleftrightarrow$

$P(a)=0$

◆2 次方程式と判別式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ の判別式を D とおくと

$D>0 \iff$ 2 次方程式は、異なる 2 つの実数解を持つ。

$D=0 \iff$ 2 次方程式は、ただ 1 つの実数解(重解)を持つ。

$D>0 \iff$ 2 次方程式は、実数解を持たない。

○解答・解説

【方針】

方程式を解く場合に、まず因数分解ができないかどうか考えます。与えられた 3 次方程式の形に注目すると、$x=-k$ がひとつの解であることが分かり、$x+k$ を因数に持ちます。因数分解の結果、2 次方程式が現れ、この 2 次方程式が異なる 2 つの実数解を持てばよいので、判別式が正となることを用います。

【解説】

$f(x)=x(x^2-4k+4)+k(k-2)^2$ とおきます。

$$
\begin{aligned}
f(-k)&=-k\{(-k)^2-4k+4\}+k(k-2)^2\\
&=-k(k^2-4k+4)+k(k-2)^2\\
&=-k(k-2)^2+k(k-2)^2=0
\end{aligned}
$$

因数定理より、$f(x)$ は $x+k$ を因数に持つので

$$f(x)=(x+k)\{x^2-kx+(k-2)^2\}$$

よって、与えらえた方程式は

$$(x+k)\{x^2-kx+(k-2)^2\}=0$$

$$x+k=0,\qquad x^2-kx+(k-2)^2=0\cdots①$$

k は実数なので $x=-k$ は実数解となり、2 次方程式①が実数解を持てばよいことになります。

判別式を D とおくと、①が実数解を持つ $\iff D\geqq 0$ なので

$$
\begin{aligned}
&D=k^2-4(k-2)^2\geqq 0\\
&\{k+2(k-2)\}\{k-2(k-2)\}\geqq 0\\
&(3k-4)(-k+4)\geqq 0\\
&(3k-4)(k-4)\leqq 0\\
&\frac{4}{3}\leqq k\leqq 4
\end{aligned}
$$

よって求める k の値の範囲は、$\underline{\frac{4}{3} \leqq k \leqq 4}$