２. 場合の数

2･1
「1,2,2,3,3,3,4,4,4,4 の数字がある」
→2 二つ、3 三つ、4 四つの区別がありません。
→どの数字を取り出して並べるか場合分けが必要です。
→1 を x コ、2 を y コ、3 を z コ、4 を w コとりだして並べる･･･と、数字を何コとりだしていくのかいちいち考えるのは大変です。
→「異なる数字を何コ使うか」で考えると場合分けが少なくなります。

2･2
問題文より、回転させれば一致する並び方は同じ並び方だと分かるので、円順列の考え方を使います。

⑶2 つの赤玉には区別がありませんが、一度「区別はある」としてから考えると一瞬で答えが求まります。

⑷すべての並べ方は、①二つの赤玉が隣り合う ②二つの赤玉の間に違う玉が一つ入る ③二つの赤玉が向かい合うの三種類です。
「赤の玉2つが隣り合わない並べ方」は、②③です。
→この問題ではそれほど差はありませんが、余事象で考えたほうが多少楽に計算できます。

2･3
「頂点 のうち 3 つの頂点を結んでできる三角形を考える」
→頂点は区別されているので、同じ形の三角形でも三角形を成す頂点の選び方が異なれば、異なる三角形ということになります。

⑵⑶直角、鈍角三角形を、図を書いて見つけるのは大変なので、図から読み取る方法は使えません。
→n角形を円に内接する図形だとし、三角形の角を円の円周角として考えると関係が簡単にわかります。
ここでも頂点はすべて区別されていることに注意しましょう。

2.4
「正多面体を回転させたとき同じ並びなら同じ塗り方とみなす」ということから、塗り方の重複に気をつけて解きます。
（ア）（イ）底面にはあらかじめ何を塗るか決めておいて、その次にどこを固定すればよいのか…と、順番に考えていきます。

（ウ）（エ）今までの問題が、この問題のヒントであると考えます。
→頂点を、（ア）（イ）における多面体の面としてみれば、計算する必要は全くありません。

2.5
３つの箱はすべて区別されています(A,B,C)が、同じ色の玉同士は区別がありません。
→玉と仕切りを並べる考え方で解きます。

(3)①どの箱も１個以上の玉を入れると考えて求める　②空の箱がある場合を、(2)の数から引く
の２通りの解き方が考えられます。
→①は、１色の玉について考える場合なら有効ですが、(3)では２色の玉を扱うので難しいです。
→余事象の考え方を使った②を選択すべきです。

*場合の数や確率の問題を解くときには、普通に解けばよいのか、または余事象を考えたほうが楽なのかを常に意識しましょう。

2.6
条件が３つ書かれていますが、マス目の中にある程度数字が書かれていないとその条件を使ってマス目を埋めることができないので、とりあえず適当に数字を書き入れます。
→あまりに適当に数字を書き入れたら複雑になるので、ある行か列か区画に、1～4 までの数字を入れることにします。このようにすれば、対称性より計算しやすくなります。
→その後は、どのような数字の入れ方の可能性があるのかを丁寧に検討していきます。

2.7
最終的にはコインの並びについて考えますが、まずは 14 枚のコインのうち何枚が表なのか、裏なのか、ということを決めるのが最初です。
→両端のコインの表裏がどうなっているかによって、何枚が表、裏なのかということは変わってくることに注意しましょう。

2.8
(2)①直方体の内部を少なくとも１度は通る進み方　②直方体の内部を１度も通らない進み方を、(1)の数からひく　　の２通りの解き方が考えられます。
→「少なくとも」という言葉から、①を避けて余事象である②を考えようとするかもしれませんが、直方体の内部の分岐点は２つしかないことから①のほうが簡単に解けます。

(3)①頂点 P,Q,R のいずれも通らない進み方　②頂点 P,Q,R を少なくとも一度通る進み方を、(1)の数からひく
の２通りの解き方が考えられます。
→①だと場合わけが多く大変なので、余事象の考え方を使った②で考えます。

*場合の数の問題を解くときは、(2)(3)のように余事象を使ったほうがよいのか、問題文の通りに解いたほうがよいのか、をその都度考えるべきです。

2.9

「カードに書かれた数字を３辺にもつ三角形が存在する場合を考えてみよう」

→この条件は、(３辺のうち最も長い辺の長さ)＜(残りの２辺の長さの和)…(*)　となることなので、これを満たす３つの数を選んでいけばよいということです。

(5)とりあえず、a_nの値を求めようと考えます。このとき、$\frac{a_n}{n}$ の収束値を求めたいだけなので、a_nの値はおおざっぱに考えればよいと分かります。

→(1)(2)などは、３辺のうち一番大きい数が決まっていたために簡単にあとの２辺の組み合わせが求められました。つまり、(5)でも一番大きい数を定めれば、あとの２辺の組み合わせがわかるのではないかと考えて、(一番大きい数) = k(定数)とおいてみます。

→その後は、(*)の関係式を使ってほかの２辺の組み合わせを考えていきます。

このとき、値をしっかり求める必要はありません。不等式などを使うことで、おおざっぱに計算していけば楽になります。

2.10

問題文を見ると、n , $n+1$, …と続くことから、漸化式を作っていけるのではないかと考えます。

→(2)のx_{n+1} , y_{n+1} をx_n , y_nを使って表す際には、横が 2n、2(n+1)の長方形の関係について考えます。

このとき、必ず長方形の図を描きつつ解き進めていかなければ混乱します。

2.11

2.10 でもそうだったように、問題文において n などの具体的でない文字が出てきた場合には、漸化式を作って解く問題であることが多いです。

→今回も、「n 本の直線」とあり、n は定数ではないのでそのまま解くことはできません。漸化式を自ら立てて求めていきます。

→n を使っていきなり漸化式を立てることが難しい場合は、小さな値(n＝2,3,4 あたり)でどのようになるか確かめてから問題を解いていくのも一つの手です。

*抽象的だったり、値が大きいために問題が複雑になって解けないのであれば、「具体的な値や小さな値で一度計算してみる」というやり方は、数学では重要です。

2.12

いつものような､マス目を進む場合の数と違うところは､点 P が左右に動き続けることができるということです。

→ずっと左右に動き続けられるので、「右に何回、左に何回、上に何回…」と考えていくことは困難です。

→一方で、点 P は元の位置よりも下に動くことはできないので、上下の運動は、上のみの動きになります。ここに注目して考えていきます。

→xがどんな値のときに上に進むか、で場合の数を考えます。