

東京医科大学入試問題

2014 年数学

解答・解説編

①小問集合

○原則

(1) ◆接線の方程式

関数 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は、

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

◆楕円の接線の方程式

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は、

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

◆2直線の垂直条件

2直線 $y = mx + n$, $y = m'x + n'$ が直交する $\Leftrightarrow m \cdot m' = -1$

(2) ◆直線と円が共有点を持つ条件

直線 $l: ax + by + c = 0$ と円 $C: (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ が共有点を持つとき、

I) 直線 l と円の中心との距離 d は、 $d \leq r$ を満たす。

II) 直線 l と円 C を連立して得られる2方程式の判別式 $D \geq 0$

◆関数の最大値・最小値を求める

基本の考えは、グラフを書いてグラフから最大値・最小値を読み取ることです。
その為に微分して増減表を書きます。

たまに、有名不等式(相加平均・相乗平均の関係など)を使って解くこともあります。

○解答・解説

(1)

【方針】

点Aが曲線 C_2 上の点であることから、方程式がひとつたちます。また、接線が直交することから、原則を利用して方程式がもうひとつたちます。それらを連立して a , b の値を求めます。

【解説】

2つの接線が直交するので、それぞれの傾きを求めます。

まず、点Aにおける C_1 の接線の傾き m は、

$$y' = \frac{1}{2}x \text{ より、 } m = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

次に、曲線 C_2 の点Aにおける接線の方程式は、

$$a \cdot 1 \cdot x + b \cdot \frac{1}{4} \cdot y = 1 \text{ であり、 } b = 0 \text{ のときは、2 接線が直交しないので、 } b \neq 0$$

$$\text{よって、傾き } m' = -\frac{4a}{b}$$

直交条件から

$$mm' = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4a}{b}\right) = -1$$
$$b = 2a \dots \textcircled{1}$$

また、点Aは曲線 C_2 上の点なので、

$$a \cdot 1^2 + b \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1$$
$$a + \frac{b}{16} = 1 \dots \textcircled{2}$$

①を②に代入して、

$$a + \frac{a}{8} = 1 \quad \therefore \quad a = \frac{8}{9}, \quad b = \frac{16}{9}$$

(2)

【方針】

$\frac{y}{x} = m$ において、 $m + \frac{1}{m}$ の最大値を求めます。その為に、微分して増減表を書きます。 m の取り得る範囲に注意です。

【解説】

$$\frac{y}{x} = m \dots \textcircled{1} \text{ とおくと、 } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{1}{m} + m \text{ より、}$$

$$f(m) = \frac{1}{m} + m$$

において、 $f(m)$ の最大値を求めていきます。

まず、 m のとりうる範囲を考えましょう。

点 P は円 C 上の点なので、①より直線 $y = mx$ と円 C が共有点を持つ条件から、
 円 C の中心 $(1, 1)$ と直線 $mx - y = 0$ との距離が、円 C の半径 $\frac{1}{4}$ 以下となります。

従って、

$$\frac{|m \cdot 1 - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} \leq \frac{1}{4}$$

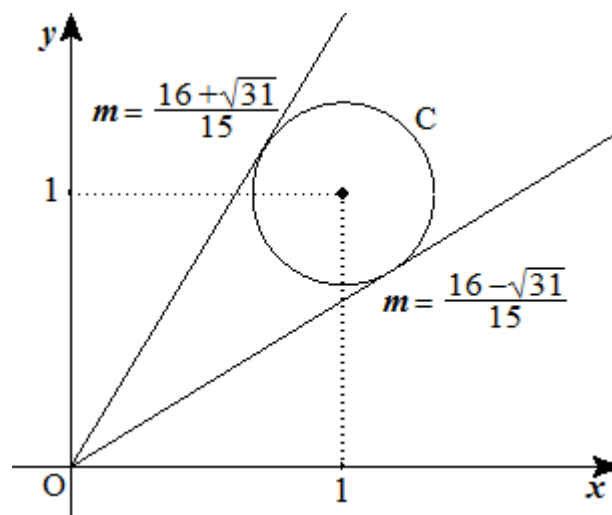
$$4|m - 1| \leq \sqrt{m^2 + 1}$$

両辺正なので 2 乗して、

$$16(m - 1)^2 \leq m^2 + 1$$

$$15m^2 - 32m + 15 \leq 0$$

$$\frac{16 - \sqrt{31}}{15} \leq m \leq \frac{16 + \sqrt{31}}{15}$$



次に、 $f(m)$ を微分して増減表を書きます。

$$f'(m) = -\frac{1}{m^2} + 1 = \frac{m^2 - 1}{m^2} = \frac{(m + 1)(m - 1)}{m^2}$$

ここで、 $\alpha = \frac{16 - \sqrt{31}}{15}$, $\beta = \frac{16 + \sqrt{31}}{15}$ とします。

増減表から、最大値は $f(\alpha)$, $f(\beta)$ が候補となります。

α , β は 2 次方程式 $15m^2 - 32m + 15 = 0$ の解なので、解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = \frac{32}{15}, \quad \alpha\beta = 1$$

このことを利用すると、

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \alpha = \beta + \alpha = \frac{32}{15}$$

$$f(\beta) = \frac{1}{\beta} + \beta = \alpha + \beta = \frac{32}{15}$$

$$\text{従って、最大値 } M \text{ は、} M = \frac{32}{15}$$

m	α	...	1	...	β
$f'(m)$		—	0	+	
$f(m)$		↘	極小	↗	

②小問集合

○原則

(1) ◆ベクトルの内積

$$\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2) \text{ のとき } \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$$

◆三角関数の最大値・最小値

関数 $y = f(x)$ が三角関数で表されているとき、 $f(x)$ の最大値・最小値を求めるには次のことを考えます。

- I) 三角関数の統一…sin, cos, tan のどれか一つに統一する。
- II) 角度を揃える。
- III) 合成する。

(2) ◆区分求積法

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \frac{b-a}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \frac{b-a}{n} \\ &= \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

とくに、 $a = 0, b = 1$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

◆はさみうちの原理

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 、において、

$$b_n \leq a_n \leq c_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成立して ($b_n < a_n < c_n$ でもよい)、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$$

ならば、数列 $\{a_n\}$ も収束して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

○解答・解説

(1)

【方針】

原則に従って、内積を計算します。出てきた式を、三角関数の積和の公式を使って変形します。

【解説】

$$\vec{p} = (3 \cos t, 2 \sin t), \quad \vec{q} = \left(3 \cos \left(t + \frac{\pi}{3}\right), 2 \sin \left(t + \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

より、

$$\begin{aligned}\vec{p} \cdot \vec{q} &= 9 \cos t \cos \left(t + \frac{\pi}{3}\right) + 4 \sin t \sin \left(t + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 9 \cdot \frac{1}{2} \left\{ \cos \left(2t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos \frac{\pi}{3} \right\} + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \left\{ \cos \left(2t + \frac{\pi}{3}\right) - \cos \frac{\pi}{3} \right\} \\ &= \frac{5}{2} \cos \left(2t + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{13}{4}\end{aligned}$$

$$0 \leq t \leq \pi \text{より、} \frac{\pi}{3} \leq 2t + \frac{\pi}{3} \leq \frac{7\pi}{3}$$

従って、

$$-1 \leq \cos \left(2t + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$$

よって、

$$M = \frac{5}{2} \cdot 1 + \frac{13}{4} = \frac{23}{4} \qquad m = \frac{5}{2} \cdot (-1) + \frac{13}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\sin A \sin B = -\frac{1}{2} \{ \cos(A+B) - \cos(A-B) \}$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} \{ \cos(A+B) + \cos(A-B) \}$$

(2)

【方針】

(前半) $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^4$ となることから、区分布積法を使って計算します。

(後半) 極限を求めるには、直接求める方法と、はさみうちの原理を用いる方法の2種類あります。はさみうちの原理を用いるためには、 $\{b_n\}$ を上からと下からの両方から不等式でおさえる必要があります。そこで、 $a - a_n$ をある図形の面積とみて、その図形よりも小さい図形と大きい図形ではさみます。

別解として、 $\sum_{k=1}^n k^4$ が計算できれば(前半)(後半)共に、その結果を利用して計算する

ことができます。

$\sum_{k=1}^n k^4$ を計算するには、2 項定理を利用します。

【解説】

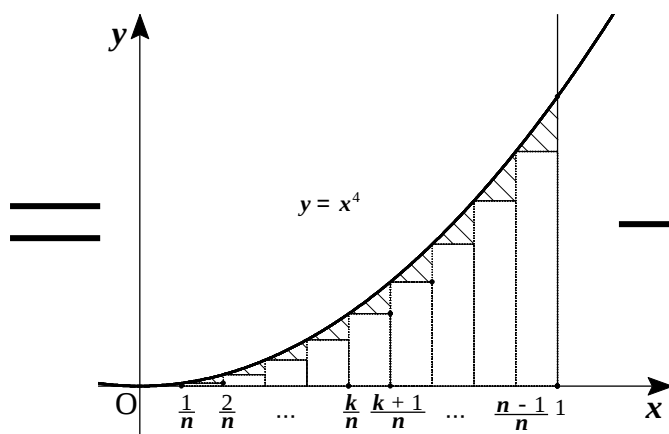
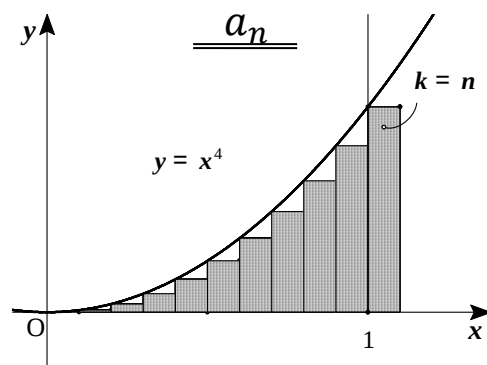
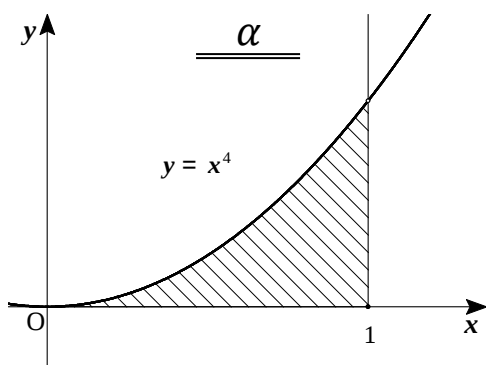
$$a_n = \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^n k^4 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^4$$

より、区分解積分を使うと

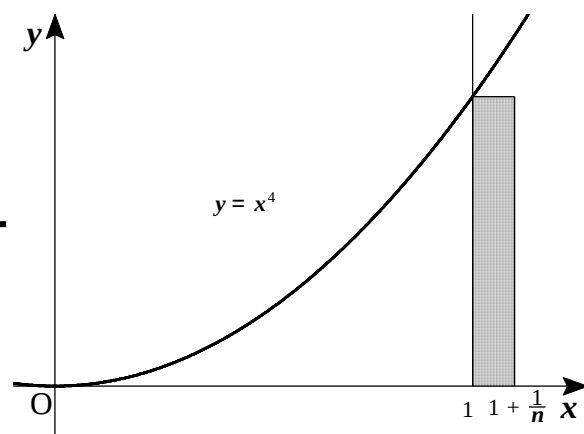
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^4 = \int_0^1 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5} \quad \therefore \quad \underline{\alpha = \frac{1}{5}}$$

次に、 $\alpha - a_n$ の図形的な意味を考えてみます。

$$\alpha - a_n = \int_0^1 x^4 dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^4$$



$S_1 = (\text{斜線部の面積})$



$S_2 = (\text{網掛部の面積})$

従って、 $\alpha - a_n = S_1 - S_2$ となります。

S_2 は長方形の面積なので、

$$S_2 = \frac{1}{n} \times 1^4 = \frac{1}{n}$$

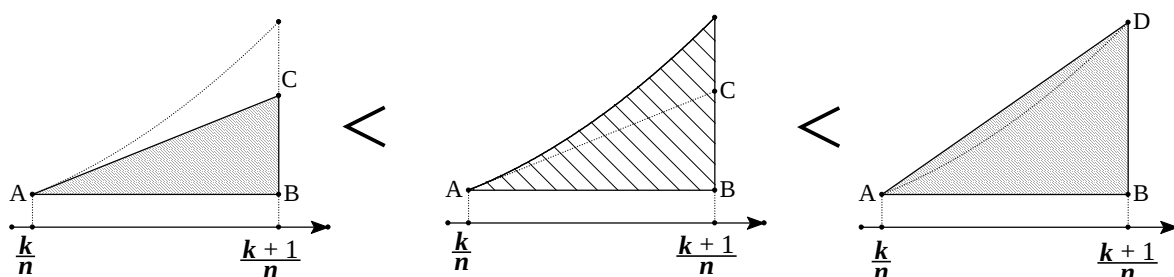
次に、 S_1 の面積を不等式で上下からはさむことを考えます。

ここで、

$$A\left(\frac{k}{n}, \left(\frac{k}{n}\right)^4\right), B\left(\frac{k+1}{n}, \left(\frac{k}{n}\right)^4\right), D\left(\frac{k+1}{n}, \left(\frac{k+1}{n}\right)^4\right)$$

とします。図のように、 $y = x^4$, $y = \left(\frac{k}{n}\right)^4$, $x = \frac{k+1}{n}$ で囲まれる図形を

その図形よりも、小さな三角形 ABC と大きな三角形 ABD ではさみうちにします。
ここで直線 AC は、点 A における $y = x^4$ の接線です。関数 $y = x^4$ は、下に凸のグラフなので、接線は図のように $y = x^4$ よりも下側にあります。



では、三角形 ABC の面積を求めます。

$y' = 4x^3$ より、接線 AC の傾きは、 $4\left(\frac{k}{n}\right)^3$ となるので、

$$BC = AB \times 4\left(\frac{k}{n}\right)^3 = \frac{1}{n} \times 4\left(\frac{k}{n}\right)^3$$

従って、

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} \times AB \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} 4\left(\frac{k}{n}\right)^3 = \frac{2}{n^2} \left(\frac{k}{n}\right)^3$$

次に、三角形 ABD の面積は、

$$\Delta ABD = \frac{1}{2} \times AB \times BD = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} \times \left\{ \left(\frac{k+1}{n}\right)^4 - \left(\frac{k}{n}\right)^4 \right\}$$

よって、

$$\frac{2}{n^2} \left(\frac{k}{n}\right)^3 < \text{Area under } y = x^4 \text{ from } \frac{k}{n} \text{ to } \frac{k+1}{n} < \frac{1}{2n} \left\{ \left(\frac{k+1}{n}\right)^4 - \left(\frac{k}{n}\right)^4 \right\}$$

ここで、辺々 $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ まで足すと

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{n^2} \left(\frac{k}{n}\right)^3 < S_1 < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n} \left\{ \left(\frac{k+1}{n}\right)^4 - \left(\frac{k}{n}\right)^4 \right\}$$

辺々、 $S_2 = \frac{1}{n}$ を引いて

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{n^2} \left(\frac{k}{n}\right)^3 - \frac{1}{n} < S_1 - S_2 < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n} \left\{ \left(\frac{k+1}{n}\right)^4 - \left(\frac{k}{n}\right)^4 \right\} - \frac{1}{n}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{n^2} \left(\frac{k}{n}\right)^3 - \frac{1}{n} < \alpha - a_n < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n} \left\{ \left(\frac{k+1}{n}\right)^4 - \left(\frac{k}{n}\right)^4 \right\} - \frac{1}{n}$$

$$2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^3 - 1 < (\alpha - a_n)n < \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{n}{n}\right)^4 - \left(\frac{0}{n}\right)^4 \right\} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

ここで、左辺の極限を計算すると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^3 - 1 \right\} = 2 \int_0^1 x^3 dx - 1 = 2 \cdot \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 - 1 = 2 \cdot \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{2}$$

よって、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha - a_n)n = -\frac{1}{2}$$

[別解]

実際に、 $\sum_{k=1}^n k^4$ を計算して極限を求めます。

二項定理を使うと、

$$\begin{aligned} (k+1)^5 - k^5 &= k^5 + {}_5C_1 k^4 + {}_5C_2 k^3 + {}_5C_3 k^2 + {}_5C_4 k^1 + 1 - k^5 \\ &= 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 \end{aligned}$$

従って、両辺 $k = 1$ から n までの和をとって

$$\sum_{k=1}^n \{(k+1)^5 - k^5\} = \sum_{k=1}^n (5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1)$$

$$\begin{aligned} (n+1)^5 - 1^5 &= 5 \sum_{k=1}^n k^4 + 10 \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2 + 10 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ &\quad + 5 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{1}{5} \left\{ (n+1)^5 - \frac{5}{2} n^2(n+1)^2 - \frac{5}{3} n(n+1)(2n+1) - \frac{5}{2} n(n+1) - n - 1 \right\} \dots \textcircled{1}$$

①を n^5 で割ると a_n を n で表すことができますが、極限を求めるだけなので4次式以下の計算は省略できます。

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^n k^4 = \frac{1}{n^5} \cdot \frac{1}{5} \{(n+1)^5 - (n \text{ の } 4 \text{ 次式})\} \\ &= \frac{1}{5} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^5 - \frac{(n \text{ の } 4 \text{ 次式})}{n^5} \right\} \end{aligned}$$

よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{5} \{(1+0)^5 - 0\} = \frac{1}{5}$$

次に、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めます。

今度は、 na_n より4次式以下の計算は省略します。

$$a_n = \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^n k^4 = \frac{1}{n^5} \cdot \frac{1}{5} \left\{ (n+1)^5 - \frac{5}{2} n^2(n+1)^2 - (n \text{ の } 3 \text{ 次式}) \right\}$$

$$\begin{aligned} b_n &= (a - a_n)n \\ &= \frac{1}{5} \cdot n - \frac{1}{5n^4} \left\{ n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - \frac{5}{2} n^2(n+1)^2 - (n \text{ の } 3 \text{ 次式}) \right\} \\ &= \frac{n}{5} - \left\{ \frac{n}{5} + 1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{5n^4} - \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 - \frac{(n \text{ の } 3 \text{ 次式})}{n^4} \right\} \end{aligned}$$

$$= - \left\{ 1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{5n^4} - \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 - \frac{(n \text{ の } 3 \text{ 次式})}{n^4} \right\}$$

よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = - \left\{ 1 + 0 + 0 + 0 + 0 - \frac{1}{2} \cdot (1 + 0)^2 - 0 \right\} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

③微分積分

○原則

(1) ◆接線の方程式

関数 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は、

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

(2) ◆回転体の体積計算

I) $y = f(x)$ を x 軸まわりに回転したとき、

$$V = \int_a^b \pi \{f(x)\}^2 dx$$

II) $x = g(y)$ を x 軸まわりに回転したとき、

$$V = \int_a^b \pi \{g(y)\}^2 dy$$

○解答・解説

(1)

【方針】

原則に従って、微分して接線の方程式を求めます。

【解説】

$f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ とおきます。

$$f'(x) = 2x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$f'(4) = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 9}} = \frac{4}{5}$$

よって、点A(4, 5)における接線 L の方程式は、

$$y = \frac{4}{5}(x - 4) + 5 = \frac{4}{5}x + \frac{9}{5}$$

(2)

【方針】

y軸の回りに1回転する図形を確認します。その図形から、求める立体の体積は、円錐の体積から曲線Cによって得られる回転体の体積を引いたものになります。原則に従って、計算します。

【解説】

まず、どのような図形をy軸の回りに1回転させるのか確認しましょう。

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^2 + 9} \text{ より、} \\ y^2 &= x^2 + 9 \quad (y > 0) \\ y^2 - x^2 &= 9 \quad (y > 0) \end{aligned}$$

つまり、曲線Cは双曲線 $y^2 - x^2 = 9$ の $y > 0$ の部分です。

これらのことから、右図の斜線部の図形をy軸の回りに回転させます。

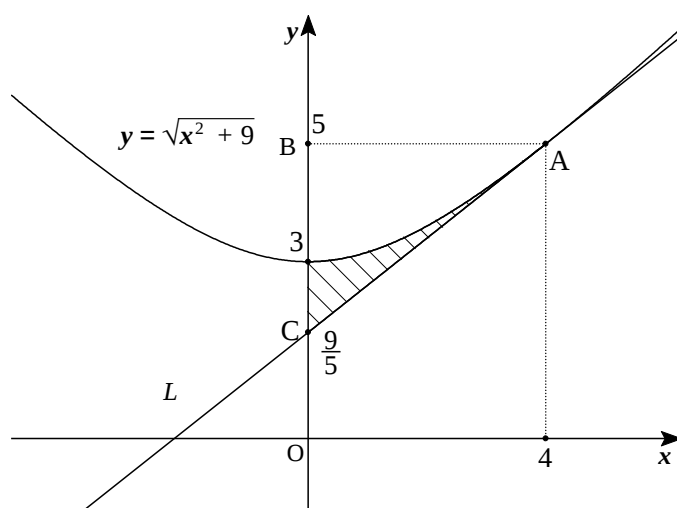
求める体積Vは、
△ABCをy軸の回りに1回転したときにできる円錐の体積を V_1
曲線Cとy軸、 $y = 5$ で囲まれる図形をy軸の回りに1回転したときにできる立体の体積を V_2 とおけば、

$$V = V_1 - V_2$$

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot \left(5 - \frac{9}{5}\right) = \frac{16^2}{15}\pi$$

$$V_2 = \int_3^5 \pi(y^2 - 9)dy$$

$$= \pi \left[\frac{y^3}{3} - 9y \right]_3^5 = \pi \left\{ \frac{5^3 - 3^3}{3} - 9(5 - 3) \right\}$$



$$= \pi \left(\frac{98}{3} - 18 \right) = \frac{44}{3} \pi$$

よって、

$$V = \frac{16^2}{15} \pi - \frac{44}{3} \pi = \frac{36}{15} \pi = \frac{12}{5} \pi$$

④2 次曲線

○原則

(1) ◆逆関数と対称性

$y = f(x)$ と $x = f(y)$ のグラフは、直線 $y = x$ に関して対称となります。

◆直線と放物線が共有点を持つ条件

直線 $ax + by + c = 0$ と放物線 $y = f(x)$ が共有点を持つ。

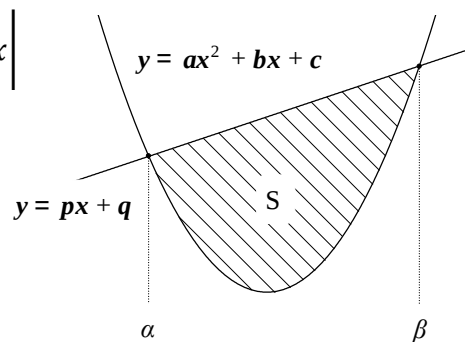
⇔

y を消去して得られる x についての 2 次方程式の判別式 $D \geq 0$

(2) ◆直線と放物線で囲まれる面積

直線 $y = px + q$ と放物線 $y = ax^2 + bx + c$ で囲まれる図形の面積 S は、直線と放物線の共有点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とすると、

$$\begin{aligned} S &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} \{ax^2 + bx + c - (px + q)\} dx \right| \\ &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} a(x - \alpha)(x - \beta) dx \right| \\ &= \frac{|a|}{6} (\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$



公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{1}{6} (\beta - \alpha)^3$$

○解答・解説

(1)

【方針】

2 曲線 C_1, C_2 が直線 $y = x$ に関して対称となることを利用します。つまり、 C_1, C_2 の共有点は必ず直線 $y = x$ 上にあるので、 C_1, C_2 が 2 点で交わることは、 C_1 と直線 $y = x$ が 2 点で交わることになります。従って、放物線と直線の共有点の問題なので判別式を使っていきます。

【解説】

2 曲線 C_1, C_2 は、 x と y を入れかえた関係にあるので、お互いに逆関数の関係になっています。従って、 C_1, C_2 のグラフは直線 $y = x$ に関して対称です。

このことから、2 曲線 C_1, C_2 が 2 点で交わるのは、曲線 C_1 と直線 $y = x$ が異なる 2 点で交わる時となります。

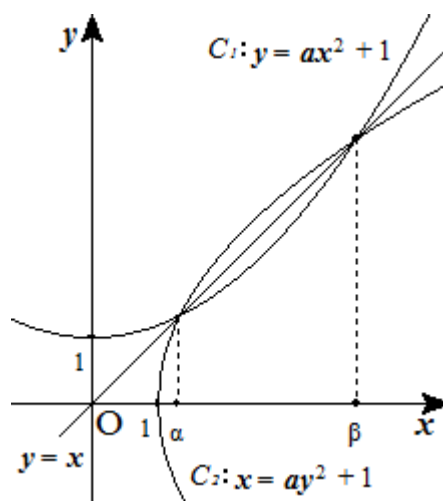
$$C_1: y = ax^2 + 1 \text{ と } y = x \text{ から得られる 2 次方程式}$$

$$ax^2 - x + 1 = 0$$

の判別式 D は、共有点を持つことから、

$$D = 1 - 4a > 0$$

$$\therefore 0 < a < \frac{1}{4}$$



(2)

【方針】

この問題も対称性を使うと、計算が易しくなります。2 曲線 C_1, C_2 で囲まれた図形は、直線 $y = x$ で対称です。従って、直線 $y = x$ と放物線 C_1 で囲まれる図形の面積を 2 倍すればよいことになります。

直線と放物線で囲まれる図形の面積は、原則の公式を使って計算します。

【解説】

$0 < \frac{3}{16} < \frac{1}{4}$ より、2 曲線 C_1, C_2 は異なる 2 点で交わります。

(1)と同様に、図形の対称性を使うと、求める面積は直線 $y = x$ と放物線 C_1 で囲まれた面積 S' の 2 倍となります。

$$ax^2 - x + 1 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

の異なる 2 つの実数解を α, β とおくと、

$$\begin{aligned} S' &= \int_{\alpha}^{\beta} \{x - (ax^2 + 1)\} = - \int_{\alpha}^{\beta} (ax^2 - x + 1) dx = -a \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= -a \left\{ -\frac{1}{6} (\beta - \alpha)^3 \right\} = \frac{a}{6} (\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

ここで①の解は、

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2a}$$

なので、

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2a} - \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2a} \\ &= \frac{\sqrt{1 - 4a}}{a} = \frac{\sqrt{1 - 4 \cdot \frac{3}{16}}}{\frac{3}{16}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} S' &= \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{16} \left(\frac{8}{3} \right)^3 \\ S &= 2S' = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{16} \left(\frac{8}{3} \right)^3 = \frac{32}{27} \end{aligned}$$
