

## ①小問集合

### ○原則

1、2次方程式の判別式・・・(1)に利用

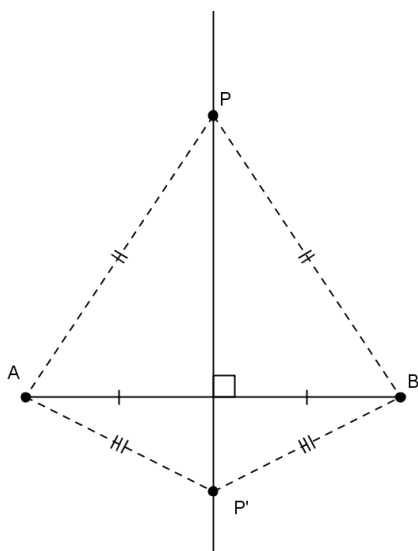
2次方程式  $ax^2 + 2b'x + c = 0$  について、判別式を  $D$  とすると  $\frac{D}{4} = b'^2 - ac$  で与えられ、方程式は  $\frac{D}{4} > 0$  ならば異なる2つの実数解、 $\frac{D}{4} = 0$  ならば重解、 $\frac{D}{4} < 0$  ならば異なる2つの虚数解をもつ。

2、関数の平行移動・・・(2)に利用

$y = f(x)$  で表されるグラフを  $x$  軸方向に  $p$ 、 $y$  軸方向に  $q$  平行移動した後のグラフは、 $x \rightarrow x - p$ 、 $y \rightarrow y - q$  で置き換えた式、すなわち  $y - q = f(x - p)$  で与えられる。

3、垂直二等分線の性質・・・(4)に利用

図のように、点Aと点Bの垂直二等分線上にある任意の点Pに対して、 $AP = BP$  が成立する。



4、直線上に存在するベクトル・・・(7)に利用

点Aの位置ベクトルを  $\vec{a}$ 、点Bの位置ベクトルを  $\vec{b}$ 、直線AB上に存在する任意の点Pの位置ベクトルを  $\vec{p}$  とすると、 $t$  を実数として  $\vec{p} = t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$  と表せる。

5、平面ベクトルの一次独立・・・(7)に利用

同一平面上に、ベクトル  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  が存在し、実数  $s$ 、 $s'$ 、 $t$ 、 $t'$  を用いて  $\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b} = s'\vec{a} + t'\vec{b}$  と表せるとき、 $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  が平行でなく、 $\vec{0}$  でなければ、 $s = s'$  及び  $t = t'$  が成立する ( $\vec{c}$  の表し方はただ一通りである)。

## ○解説

(1)

・解答の方針

題意より、2次方程式  $f(x) = x^2 - 2mx + 5m + 6 = 0$  が異なる2つの負の解をもてばよいことがわかる。以上のように、2次方程式の解に存在範囲がある場合は、(i)判別式、(ii)軸、(iii)  $f(0)$ などの境界線上の値、の3つの値のとりうる範囲を考える。これら3つの条件をともにみたすような  $m$  の範囲を求めれば良い。

・解説

$f(x) = x^2 - 2mx + 5m + 6$  とおくと、 $f(x) = (x - m)^2 - m^2 + 5m + 6$  である。

ここで、題意より  $f(x) = x^2 - 2mx + 5m + 6 = 0$  は異なる2つの負の解をもつ。

(i)異なる2つの解をもつので、判別式を  $D$  とすると、

$$\frac{D}{4} = m^2 - 5m - 6 > 0$$

$$(m - 6)(m + 1) > 0$$

$$\therefore m < -1, 6 < m \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(ii)軸の方程式は  $x = m$  であるから、 $m < 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$

(iii)  $f(0) > 0$  となるので、 $f(0) = 5m + 6 > 0$  より、 $-\frac{6}{5} < m \cdots \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}$ をともにみたせばよいので、求める条件は  $-\frac{6}{5} < m < -1 \cdots \cdots$ (答) である。

(2)

・解答の方針

原則2に従って、平行移動後の放物線の式を求める。この式と  $y = x$  を連立方程式として解けば、求める共有点の座標が得られる。

・解説

平行移動した後の放物線の方程式は、

$$y + \frac{1}{2} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right) + 2$$

$$y = x^2 - 2x + \frac{9}{4}$$

となる。よって求める共有点は、 $y = x$  と連立すると、

$$x = x^2 - 2x + \frac{9}{4}$$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$$

$$4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$(2x - 3)^2 = 0$$

$$\therefore x = \frac{3}{2}, y = \frac{3}{2}$$

ゆえに求める共有点の座標は、 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \cdots \cdots$ (答) である。

(3)

・解答の方針

9個の玉から4個を選ぶ選び方は ${}_9C_4$ 通り、

5個の赤玉から2個を選び、かつ、4個の白玉から2個を選ぶ選び方は ${}_5C_2 \times {}_4C_2$ 通り、  
となるので、これらの場合の数を使うと直ちに求める確率が得られる。

・解説

求める確率は、

$$\frac{{}_5C_2 \times {}_4C_2}{{}_9C_4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10}{21} \dots\dots(\text{答}) \text{である。}$$

(4)

・解答の方針

求める点を $P(x, y)$ とすると、原則3より点PはABの垂直二等分線上にあるので、 $AP = BP$ が成り立つ。また、点PはBCの垂直二等分線上にあるので、 $BP = CP$ が成り立つ。これら2つの式を $x, y$ の連立方程式として解けば、求める座標が得られる。

・解説

求める交点の座標を $P(x, y)$ とおくと、点PはABの垂直二等分線上にあるので、

$$AP = BP$$

$$AP^2 = BP^2$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = (x - 1)^2 + (y - 4)^2$$

$$3x + y = 2 \dots\dots\textcircled{1}$$

が成立する。

また同様にして、点PはBCの垂直二等分線上にあるので、

$$BP = CP$$

$$BP^2 = CP^2$$

$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = (x - 5)^2 + (y - 6)^2$$

$$2x + y = 11 \dots\dots\textcircled{2}$$

が成立する。①②を連立して解くと、 $x = -9, y = 29$  となるので、求める交点の座標は $(-9, 29)$  ……(答) である。

(5)

・解答の方針

与えられた漸化式の両辺の逆数をとると、 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_n}$  となる。 $b_n = \frac{1}{a_n}$  と置き換えることで、標準的な漸化式の問題に帰着でき、これらを順次解いていくことで求める一般項が得られる。

・解説

与えられた漸化式の両辺の逆数をとると、

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3a_n+1}{2a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_n}$$

ここで、 $b_n = \frac{1}{a_n}$  ……①とおくと、

$$b_{n+1} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} b_n$$

となる。この漸化式の特徴方程式  $x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x$  を解くと、 $x=3$  となるので、

$$b_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}(b_n - 3)$$

よって、数列  $\{b_n - 3\}$  は初項  $b_1 - 3 = \frac{1}{a_1} - 3 = -2$ 、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから、

$$b_n - 3 = -2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$b_n = -2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 3$$

これを①に代入すると、 $a_n = \frac{1}{-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 3} = \frac{2^{n-1}}{-2+3 \cdot 2^{n-1}}$  ……(答) である。

(6)

・解答の方針

$\left(\frac{1}{6}\right)^{150} = 10^x$  において、 $x$ の値を求めていけば良い。

$x$ の値を求めると  $10^{-117} < \left(\frac{1}{6}\right)^{150} < 10^{-116}$  となるので、求める位が分かる。

上の不等式から位が分かりにくいときは、以下のような簡単な数の場合を考える。

例えば、 $10^{-2} < X < 10^{-1}$  すなわち、 $0.01 < X < 0.1$ をみたすような $X$ は明らかに小数第2位に初めて0でない数が現れるので、不等式の左端にある数字の指数を参照することで答えが導かれることが分かる。

・解説

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{150} = 10^x \text{ とおくと、}$$

$$6^{-150} = 10^x$$

$$\log_{10} 6^{-150} = \log_{10} 10^x$$

$$-150 \log_{10} 6 = x$$

$$x = -150(\log_{10} 2 + \log_{10} 3)$$

$$= -150(0.3010 + 0.4771)$$

$$= -116.715$$

よって、 $\left(\frac{1}{6}\right)^{150} = 10^{-116.715}$  であるから、 $10^{-117} < \left(\frac{1}{6}\right)^{150} < 10^{-116}$  となり、小数第 117 位

に初めて 0 でない数字が現れる。……(答)

(7)

・解答の方針

点Eは、線分BC上にも線分AD上にもあるので、原則 4, 5 に従って、 $\overrightarrow{OE}$  を 2 通りの方法で表し、係数を比較することで求めるベクトルが得られる。

・解説

題意より、 $\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$  である。

また、点Eは線分BC上にあるので、実数sを使って

$$\overrightarrow{OE} = s\overrightarrow{OC} + (1-s)\overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}s\overrightarrow{OA} + (1-s)\overrightarrow{OB} \cdots \cdots \textcircled{1} \text{ と表せる。}$$

同様に、点Eは線分AD上にあるので、実数tを使って

$$\overrightarrow{OE} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OD} = t\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}(1-t)\overrightarrow{OB} \cdots \cdots \textcircled{2} \text{ と表せる。}$$

$\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  は平行でなく、ともに  $\vec{0}$  でないので、 $\textcircled{1}\textcircled{2}$  より

$$\begin{cases} \frac{2}{3}s = t \\ 1-s = \frac{3}{5}(1-t) \end{cases}$$

が成立する。これを解くと、 $s = \frac{2}{3}$ ,  $t = \frac{4}{9}$  となる。この値を $\textcircled{1}$ に代入すると、

$$\overrightarrow{OE} = \frac{4}{9}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$$

ここで、 $\overrightarrow{OA} = (4, -3)$ ,  $\overrightarrow{OB} = (2, 5)$  であるから、

$$\overrightarrow{OE} = \frac{4}{9}(4, -3) + \frac{1}{3}(2, 5) = \left(\frac{22}{9}, \frac{1}{3}\right) \cdots \cdots \text{(答)} \text{ である。}$$

(8)

・解答の方針

与えられた式から、 $x_{n+1}$ 及び $y_{n+1}$ についての漸化式をつくり、数列 $\{(x_n)^2 + (y_n)^2\}$ の一般項を求めていけば良い。

・解説

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A \cdot A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n - 2y_n \\ 2x_n + y_n \end{pmatrix}$$

であるから、

$$(x_{n+1})^2 + (y_{n+1})^2 = (x_n - 2y_n)^2 + (2x_n + y_n)^2 = 5\{(x_n)^2 + (y_n)^2\}$$

となる。よって、数列  $\{(x_n)^2 + (y_n)^2\}$  は初項 $(x_1)^2 + (y_1)^2$ 、公比5の等比数列である。

ここで、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

であるから、 $(x_1)^2 + (y_1)^2 = (-1)^2 + 3^2 = 10$  である。よって求める値は、

$$(x_n)^2 + (y_n)^2 = 10 \cdot 5^{n-1} = 2 \cdot 5^n \dots\dots(\text{答}) \text{ である。}$$

## ②図形と極限

### ○原則

1、直線の方程式・・・(1)に利用

2点  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  を通る直線の方程式は

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \text{ で与えられる。}$$

また、傾き $m$ で点  $(x_1, y_1)$  を通る直線の方程式は

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ で与えられる。}$$

2、直線の方程式のなす角・・・(2)に利用

直線  $y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) が $x$ 軸となす角を $\theta$ とすると、 $\tan \theta = a$  が成立する。

3、扇形の面積・・・(2)に利用

半径 $r$ 、中心角 $\theta$ [rad] の扇形の面積 $S$ は  $S = \frac{1}{2}r^2\theta$  で与えられる。

また、中心角 $\theta$ が度数法で表されている場合は、 $S = \pi r^2 \times \frac{\theta}{360}$  で求めることができる。

4、無限等比級数・・・(3)に利用

初項 $a$ 、公比 $r$  (ただし $|r| < 1$ )の無限等比級数は、 $\frac{a}{1-r}$  で与えられる。

## ○解説

(1)

・解答の方針

原則1に従って、 $(1-\sqrt{3}, 0)$ 、 $(1, 1)$ を通る直線の方程式を求める。この方程式と円の方程式を連立するとAの座標が求められる。 $l$ は求めた直線と直交し、点Aを通るので、原則1から求める方程式が得られる。

・解説

2点  $(1-\sqrt{3}, 0)$ 、 $(1, 1)$  を通る直線の方程式は、

$$y = \frac{1-0}{1-(1-\sqrt{3})}(x-1+\sqrt{3})$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

となる。点Aはこの直線と円Cの交点であるから、 $\textcircled{1}$ を円の方程式に代入すると

$$(x-1)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 - 1\right)^2 = 1$$

$$(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^2 = 1$$

$$\frac{4}{3}(x-1)^2 = 1$$

$$x-1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore x = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。点Aの $x$ 座標は1より大きいので、 $x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。これを $\textcircled{1}$ に代入すると、

$$y = \frac{3}{2} \text{ であるから、 } A\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right) \cdots \cdots \textcircled{2} \text{ である。}$$

求める直線 $l$ は、 $\textcircled{1}$ に直交するので、傾きは $-\sqrt{3}$ である。また、この直線は点Aを通るので、求める直線の方程式は

$$y - \frac{3}{2} = -\sqrt{3}\left(x - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$y = -\sqrt{3}x + 3 + \sqrt{3} \cdots \cdots (\text{答}) \text{ である。}$$

(2)

・解答の方針

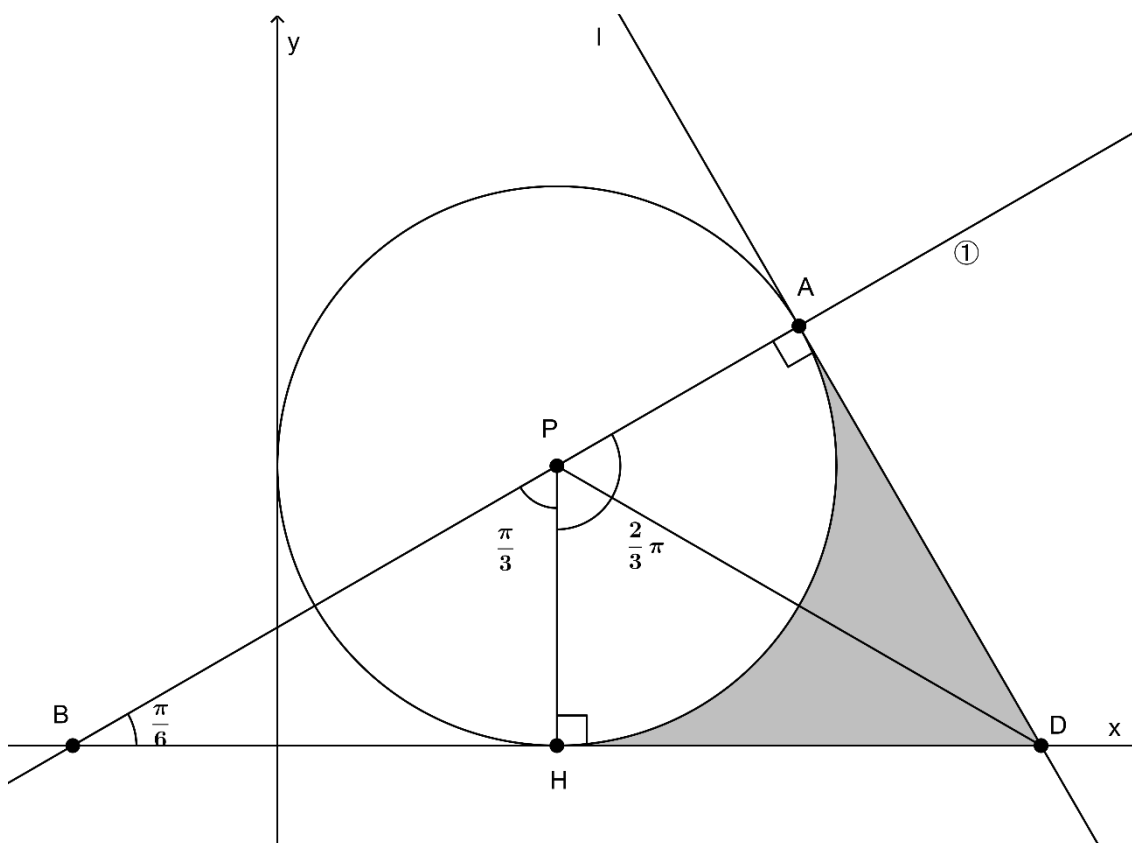
座標平面上の面積を求める必要があるため、積分を利用しようとするかもしれないが、

積分を使った面積計算は複雑になることが多く、最終手段と考えるべきである。

今回は、円Cの中心をP、Pからx軸に下ろした垂線の足をH、直線lとx軸の交点をDとすると、斜線部分の面積が  $\triangle PAD + \triangle PHD - (\text{扇形APHの面積})$  で求められるので、この値を計算していけばよい。

・解説

以下の図のように、円Cの中心をP、Pからx軸に下ろした垂線の足をH、①の直線とx軸の交点をB、直線lとx軸の交点をDとおく。



①より、 $\tan \angle PBH = \frac{1}{\sqrt{3}}$  であるから、 $\angle PBH = \frac{\pi}{6}$  となり、 $\angle BPH = \frac{\pi}{3}$ 、 $\angle APH = \frac{2}{3}\pi$  となる  
ことがわかる。

よって扇形APHの面積は、 $\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3}$  ……②

また、(1)の答えに  $y = 0$  を代入すると  $x = 1 + \sqrt{3}$  となるので、 $D(1 + \sqrt{3}, 0)$  である。  
ここで、明らかに  $H(1, 0)$  であるから、 $DH = \sqrt{3}$  である。

よって、 $\triangle PAD = \triangle PHD = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ……③

②③より、求める面積は、



$$\triangle PAD + \triangle PHD - (\text{扇形 APH の面積}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \dots\dots(\text{答}) \text{である。}$$

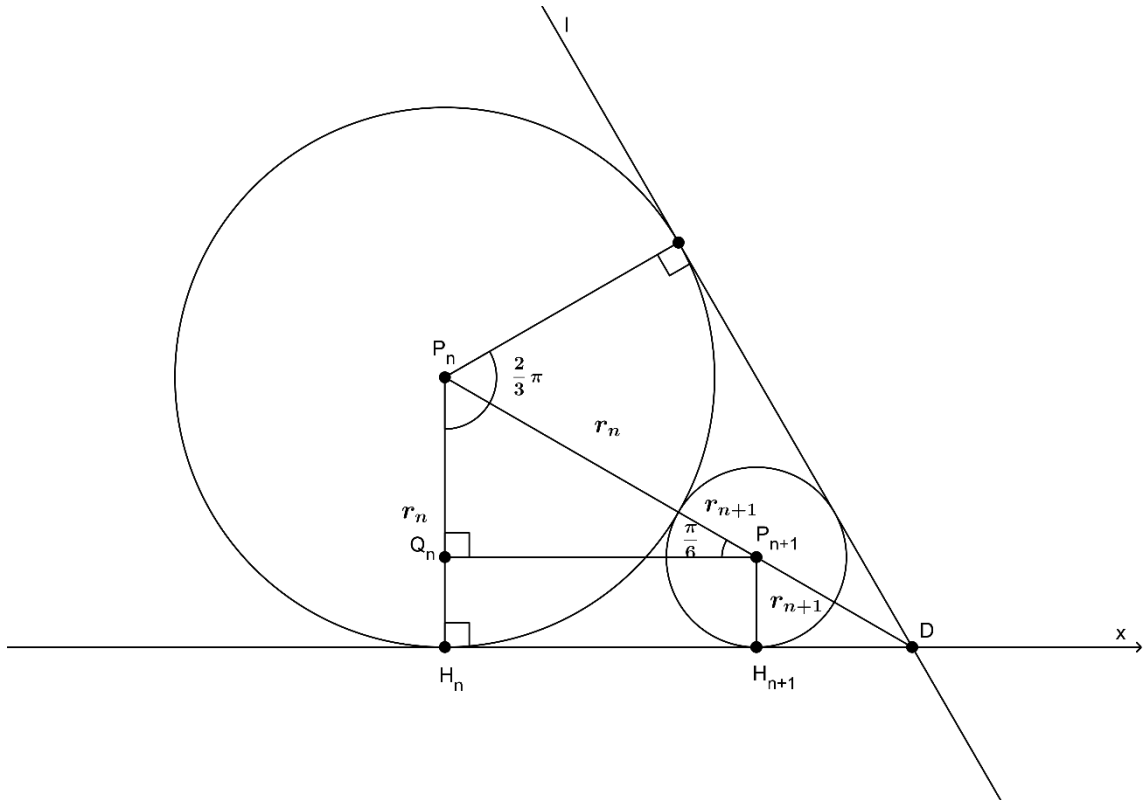
(3)

・解答の方針

求める無限級数は円の面積の和であるから、これを計算するためには円 $C_n$ の半径 $r_n$ が分かればよいことになる。よって、円 $C_n$ と円 $C_{n+1}$ の位置関係から $\{r_n\}$ に関する漸化式をつくり、一般項を求めることで無限級数の値を計算することができる。

・解説

以下の図のように、円 $C_n$ の中心を $P_n$ 、 $P_n$ から $x$ 軸に下ろした垂線の足を $H_n$ 、 $P_{n+1}$ から $P_nH_n$ に下ろした垂線の足を $Q_n$ とおく。



$$(2) \text{より } \angle ADH = \frac{\pi}{3} \text{ であるから、} \angle P_n P_{n+1} Q_n = \frac{\pi}{6}$$

また、図より  $P_n P_{n+1} = r_n + r_{n+1}$ ,  $P_n Q_n = r_n - r_{n+1}$  となるので、

$$P_n P_{n+1} \sin \angle P_n P_{n+1} Q_n = P_n Q_n$$

$$(r_n + r_{n+1}) \cdot \frac{1}{2} = r_n - r_{n+1}$$

$$\therefore r_{n+1} = \frac{1}{3} r_n$$

よって、 $\{r_n\}$ は初項 $r_1 = \frac{1}{3}$ 、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列となるので、

$$r_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

したがって、 $S_n = \pi(r_n)^2 = \pi\left(\frac{1}{9}\right)^n$ であるから、求める無限級数は初項 $\frac{\pi}{9}$ 、公比 $\frac{1}{9}$ の無限等比級数であり、 $\left|\frac{1}{9}\right| < 1$ より収束する。

ゆえに、

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{9}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{\pi}{8} \dots\dots(\text{答}) \text{である。}$$

### ③空間ベクトル

#### ○原則

1、三角形の面積・・・(1)(3)に利用

$\triangle ABC$ の面積 $S$ は、 $S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin A$  で与えられる。

2、同一直線上にある点・・・(2)に利用

3点 $A, B, C$ が同一直線上にあるとき、 $k$ を実数とすると、 $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$  と表すことができる。

3、終点が同一平面上にあるベクトル・・・(2)に利用

空間上の点 $A, B, C, O, P$ に対して、実数 $s, t, u$ を使って

$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} + u\overrightarrow{OC}$  と表せたとする。このとき、点 $P$ が平面 $ABC$ 上に存在するならば、 $s + t + u = 1$ が成立する。

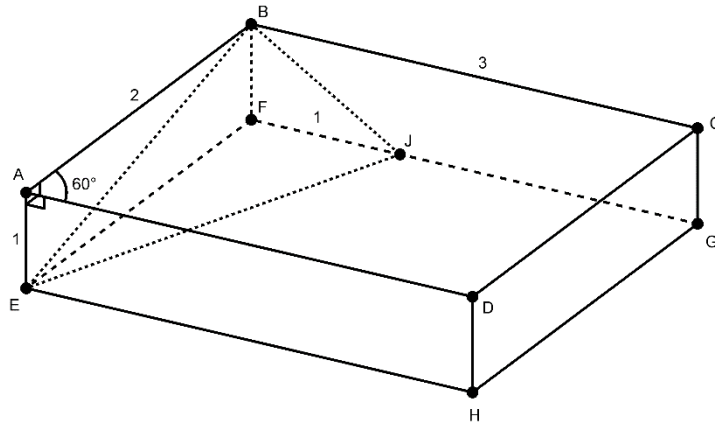
#### ○解説

(1)

・解答の方針

$|\overrightarrow{BE}|^2, |\overrightarrow{BJ}|^2, \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BJ}$ をそれぞれ計算し、原則1を利用して求める面積を計算する。

・解説



題意より、平行六面体は上の図のようになる。よって、

$$\vec{BE} = \vec{BA} + \vec{AE} \dots\dots①$$

$|\vec{BA}| = 2$  ,  $|\vec{AE}| = 1$  ,  $\vec{BA} \cdot \vec{AE} = 0$  であるから、

$$|\vec{BE}|^2 = (\vec{BA} + \vec{AE}) \cdot (\vec{BA} + \vec{AE}) = |\vec{BA}|^2 + 2\vec{BA} \cdot \vec{AE} + |\vec{AE}|^2 = 2^2 + 2 \cdot 0 + 1^2 = 5$$

$$\therefore |\vec{BE}| = \sqrt{5} \dots\dots②$$

同様に、

$$\vec{BJ} = \vec{BF} + \vec{FJ} \dots\dots③$$

$|\vec{BF}| = |\vec{AE}| = 1$  ,  $|\vec{FJ}| = \frac{1}{3}|\vec{FG}| = \frac{1}{3}|\vec{BC}| = 1$  ,  $\vec{BF} \cdot \vec{FJ} = 0$  であるから、

$$|\vec{BJ}|^2 = (\vec{BF} + \vec{FJ}) \cdot (\vec{BF} + \vec{FJ}) = |\vec{BF}|^2 + 2\vec{BF} \cdot \vec{FJ} + |\vec{FJ}|^2 = 1^2 + 2 \cdot 0 + 1^2 = 2$$

$$\therefore |\vec{BJ}| = \sqrt{2} \dots\dots④$$

また、①③より、

$$\begin{aligned} \vec{BE} \cdot \vec{BJ} &= (\vec{BA} + \vec{AE}) \cdot (\vec{BF} + \vec{FJ}) \\ &= \vec{BA} \cdot \vec{BF} + \vec{BA} \cdot \vec{FJ} + \vec{AE} \cdot \vec{BF} + \vec{AE} \cdot \vec{FJ} \\ &= 2 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ + 2 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ + 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^\circ + 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ \\ &= 0 - 1 + 1 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって  $\angle EBJ = 90^\circ$  である。ゆえに、②④より

$$\Delta EBJ = \frac{1}{2} \cdot |\vec{BE}| \cdot |\vec{BJ}| \sin 90^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{10}}{2} \dots\dots(\text{答}) \text{ である。}$$

(2)

・解答の方針

3点F, K, Dは同一直線上にあるので、原則2に従って  $\vec{FK} = k\vec{FD}$  と表せる。また、点Kが平面EBJ上にあることから、 $k$ を求めることができる。得られた $\vec{FK}$ の式について、ベクトル

ルの始点をEにそろえれば、求めるベクトルが得られる。

・解説

$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG}$  と表せる。3点F, K, Dは同一直線上にあるので、 $k$ を実数とすると  
 $\overrightarrow{FK} = k\overrightarrow{FD} = k\overrightarrow{FB} + k\overrightarrow{FE} + k\overrightarrow{FG} = k\overrightarrow{FB} + k\overrightarrow{FE} + 3k\overrightarrow{FJ}$  ……⑤

また、点Kは平面EBJ上に存在するので、

$$k + k + 3k = 1$$

$$5k = 1$$

$$\therefore k = \frac{1}{5}$$

この $k$ の値を⑤に代入すると、

$$\overrightarrow{FK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{FB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{FE} + \frac{3}{5}\overrightarrow{FJ}$$

$$\overrightarrow{EK} - \overrightarrow{EF} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EF}) + \frac{1}{5}(-\overrightarrow{EF}) + \frac{3}{5}(\overrightarrow{EJ} - \overrightarrow{EF})$$

$$\therefore \overrightarrow{EK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{EB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{EJ} \text{ ……(答)}$$

(3)

・解答の方針

(2)の結果から、点K及び点Lの位置関係がわかる。この位置関係から、四面体BEFJとの体積を比較することで、求める体積が計算できる。

・解説

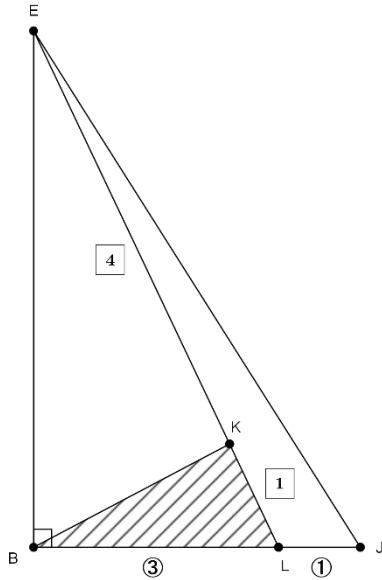
$$\Delta EFJ = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot FJ \sin \angle EFJ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{よって、四面体BEFJの体積は、} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ ……⑥}$$

ここで、(2)の結果より、

$$\overrightarrow{EK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{EB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{EJ} = \frac{4}{5} \cdot \frac{\overrightarrow{EB} + 3\overrightarrow{EJ}}{4}$$

となる。よって、下図のように  $BL : LJ = 3 : 1$ ,  $EK : KL = 4 : 1$  であることがわかる。



したがって、

$$\Delta BKL = \frac{1}{5} \Delta EBL = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} \Delta EBJ = \frac{3}{20} \Delta EBJ$$

四面体KFBLは、 $\Delta BKL$ を底面と考えると、四面体BEFJと高さが等しく、底面は $\frac{3}{20}$ 倍である

から、体積も $\frac{3}{20}$ 倍となる。ゆえに、求める体積は⑥より  $\frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{3}{20} = \frac{\sqrt{3}}{40}$  ……(答) である。

## ④定積分と極限

### ○原則

1、置換積分法・・・(1)で利用

$x = u(t)$  と置き換えを行ったとき、

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(u(t)) \frac{dx}{dt} dt$$

と計算することができる。ただし、 $\alpha, \beta$ は  $a = u(\alpha)$ ,  $b = u(\beta)$  をみたす数である。

2、はさみうちの原理・・・(1)で利用

$a_n \leq b_n \leq c_n$  が常に成立し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$  であるとき、

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$  が成立する。

### ○解説

(1)

・解答の方針

$I_1 = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$  であるから、 $\frac{x^2}{1+x^2}$  の次数下げを行う。また、 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$  は原則 1 を利用して  $x = \tan \theta$  と置き換え、積分を行えば良い。 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$  は直接計算出来ないので、はさみうちの原理(原則 2)を利用して値を求める。

・解説

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = [x]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = 1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \text{ となる。ここで、} x =$$

$\tan \theta$  とおくと、 $dx = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$  であり、

$x$	$0 \rightarrow 1$
$\theta$	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

となるので

$$I_1 = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = 1 - [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4} \dots\dots(\text{答})$$

である。

また、 $0 \leq x \leq 1$  のとき、 $0 \leq \frac{x^{2n}}{1+x^2} \leq x^{2n}$  となるので

$$0 < \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx < \int_0^1 x^{2n} dx$$

$$0 < \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx < \left[ \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1$$

$$0 < I_n < \frac{1}{2n+1}$$

ここで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$  であるから、はさみうちの原理より  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0 \dots\dots(\text{答})$  である。

(2)

・解答の方針

問題文の誘導に従い、まず  $I_n - I_{n+2}$  を計算する。またその結果を利用して極限の値を計算すれば良い。

・解説

$$\begin{aligned} I_n - I_{n+2} &= \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx - \int_0^1 \frac{x^{2n+4}}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left( \frac{x^{2n}}{1+x^2} - \frac{x^{2n+4}}{1+x^2} \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{x^{2n}(1-x^4)}{1+x^2} dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^{2n}(1-x^2)(1+x^2)}{1+x^2} dx \\
&= \int_0^1 x^{2n}(1-x^2) dx \\
&= \left[ \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \\
&= \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} \cdots \cdots (\text{答})
\end{aligned}$$

である。また、上の結果の $n$ を $2n-1$ に置き換えると、

$$I_{2n-1} - I_{2n+1} = \frac{2}{(4n-1)(4n+1)}$$

となるので、

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \frac{2}{(4k-1)(4k+1)} &= \sum_{k=1}^n (I_{2k-1} - I_{2k+1}) \\
&= (I_1 - I_3) + (I_3 - I_5) + (I_5 - I_7) + \cdots + (I_{2n-1} - I_{2n+1}) \\
&= I_1 - I_{2n+1}
\end{aligned}$$

よって、(1)の結果より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{2n+1} = 0$  であるから、求める極限は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(4n-1)(4n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2}{(4k-1)(4k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (I_1 - I_{2n+1}) = I_1 = 1 - \frac{\pi}{4} \cdots \cdots (\text{答}) \text{ である。}$$