4. 整数

4.1
30 の倍数とは、2 かつ 3 かつ 5 の倍数であるということです。
→ひとつずつ示していきます。
→与えられた式はそのままではどう考えてよいかわからないので、因数分解して考えます。

4.2
(1) 両辺を因数分解して、両辺の項がそれぞれ何と等しいのか考えます。

(2) 両辺はともにこれ以上因数分解できません。
→41 はそれほど大きい数ではないので、x、y がどのような数字になるのかひとつひとつ当てはめて考えていくことにします。

(4) ここで与えられた式は(1)(2)で出てきた式に似ていることから、前問を利用するのではないかと考えます。また、定数ではない数 n がでてくるので、数学的帰納法を使って解けばよいのではないかと考えます。
→(3)は、非常に簡単な因数分解の問題だったので、これを問題にした意図としては、(4)で利用させるためであった可能性が高いことがわかります。したがって、数学的帰納法のどこかで(3)を使おうと考えて解いていきます。

4.3
x,y,z は独立して動く値なので、与式は普通の方程式のようには解けません。
→x,y,zの大小関係はもともと明記されているので、この関係を使って左辺がとり得る値を考えます。

4.4
(1) 与式を見て、右辺が因数分解できるので因数分解します。
→右辺の中の項はどちらも 3 の何乗かになっていなければならないので、次数の低いほうを3^a(a: 自然数)などとおきます。次数の低いほうを選んだ理由は、この式($k+1=3^a$)は次数の高いほうに代入でき、新たな関係式を生み出せるからです。
→次数の高いほうに代入したことで出来た新たな関係式を使って、解き進めます。

(2) 与式を見ると、右辺は因数分解できないので、(1)のようには解けません。
→どのような規則があるのかを確かめるために、n に具体的な値を入れて整数 k が存在するか実験してみます。
($n=6$くらいまで試してみると、$n=2,4$ の時に整数 k が存在することに気づきます。)
→この時点で、n が奇数のときには式を満たす整数 k が存在しないので、n の偶奇で場合分けするのでは、と予想できます。
→この方針で計算しようと決められれば、あとは簡単でしょう。

4.5
問題文を読むと、1 つの角の角度と、もっとも長い辺(z)が決まっているので、余弦定理を使えば x, y, z についての関係式を作ることができます。
→余弦定理による関係式と、それぞれの問いで与えられた x, y, z の関係式を使って解いていきます。

(3)　(1)(2)と同様に因数分解の形から考えていきます。
注意すべき点は、$x < y$であることと、(左辺)＝(負)×(負)になる可能性があるということです。この部分の記述がしっかりできれば高得点がねらえます。
→（左辺)＝(負)×(負)になる可能性について調べたいのですが、現在わかっているのは、x, yの大小関係と、大体の範囲、つまりx, yの大きさについての情報だけです。これらの情報を使っていくしかないと考えて、$x-2^{a+1}3^{a}$，$y-2^{a+1}3^{a}$ の範囲について考察していきます。

*(3)では、$x-2^{a+1}3^{a}$ ，$y-2^{a+1}3^{a}$ の範囲について考えていくことになるため、$x-2^{a+1}3^{a}$ ，$y-2^{a+1}3^{a}$を解答中に書くことが多くなります。したがって、これらを文字で置き換えてから解き進めることで、時間短縮になります。
長い式などが多く登場する場合は、それを簡単な文字で置き換えることで解答がすっきりします。積極的に利用しましょう。

4.6
まず、問題文をそのまま読んだだけではヒントが少ないので、a, b, c の関係について考えていきます。
→素数とは自然数のことであるので、$a-b-8>0$かつ$b-c-8>0$ ということから、$a>b>c>0$…①という関係が成り立つことがわかります。
→a, bの偶奇が一致すれば$a-b-8$は偶数になり、一致しなければ奇数になります。b, cと$b-c-8$の関係も同様です。ここで、素数であって偶数である数は 2 のみなので、①から必ずa, bは奇数になります。
→c の値がどうなるかで場合分けをしていけばよさそうです。

4.7
(1)「a^2を 3 で割った余りは～」と問題文中にあります。
→aが 3 の倍数か、そうでないか、で場合分けしていけばよいでしょう。

(2)$a^2+b^2=3c^2$を満たすと仮定すると～」と問題文中にあります。
→a^2+b^2は 3 の倍数になる、ということです。
→(1)の結果を利用して、a, bがどのような数の場合にa^2+b^2が 3 の倍数になるのか考えましょう。

(3)「～は存在しないことを証明せよ」とありますが、そのままではどう証明したらよいのかわかりません。
→「～が存在する」と仮定してから、その仮定の矛盾を導きましょう。
→解答ではa, b, c の最大公約数を利用しており、別解ではa, b, c がそれぞれ 3 の倍数であることに注目しています。(1)(2)では自然数と 3 の倍数の関係について考えてきたので、この流れで行くと、別解のほうが思いつきやすいのではないかと思います。
→$a=3a_1, b=3b_1, c=3c_1$ などとおいて、与式に代入していきます。これを繰り返していくと、a, b, cは存在しな

い数であることが見えてきます。

4.8

(2) (1)において、$m=5$として具体的に計算したことを生かして考えましょう。この時点で、答えがどのようになるのか大体の見当はつくと思いますが、自信がなければ$m=1\sim4$で同様にやってみてもよいでしょう。

(3)「$N(m)$が素数ならば、mも素数であることを証明せよ。」
→対偶は、「mが素数でないならば、$N(m)$も素数でない」なので、これを証明します。
→$m=ab$（a,bは 2 以上の自然数）のとき、$2^m-1=2^{ab}-1=(2^a-1)\{(2^a)^{b-1}+(2^a)^{b-2}+\cdots+2^a+1\}$ と因数分解できるということは覚えておかなければなりません。この因数分解のしかたが分かっていれば、(3)は簡単です。

4.9

この問題は、記述のいらない穴埋め問題であることと、それほど大きくない数字について考えていることから、x,yに一つ一つ代入していって答えを求める方針でかまいません。

(エ)ある数nがAに属するとき、$n+5$もAに属することがわかります。($n=5x+11y$ より)
→Aに属する数を小さいほうから順に書き出していって、5連続の数がすべてAに属した場合、その数以降はすべてAに属するといえます。
すべてAに属する、最初の5連続の数は、地道に書き出してみつけていくしかありません。

4.10

(2)まずは、どうにかして普通に示そうと考えますが、示し方がよくわかりません。
→「npをqで割った余りが一致するようなときがある」と仮定して、その矛盾を導けばよいのではないか、と考えます。
→$n_1=qA_1+B\ldots$① $n_2=qA_2+B\ldots$② となると仮定します。($1\le n_1,n_2\le q$, $n_1\ne n_2$ また、Aは商、Bは余り)
①−②より、$n_1-n_2=q(A_1-A_2)$となります。その後は、(1)で証明したことを使って、この式が矛盾することを示します。

(3)問題文より、求める直線の方程式は、$px+qy=k\quad(k\ne0)\ldots$①となります。これが、$k=\pm1$のときに題意をみたすことが言えればよいでしょう。
→①式を変形すると、$px=(-q)y+k$ となります。(2)より、$k=0,1,2,\ldots,n-1$ です。さらに、①の直線と原点との距離は、$\frac{|k|}{\sqrt{p^2+q^2}}$ なので、kが小さいほど原点から近くなります。
したがって、これらを満たすkの値は、$k=1$になります。同様に、符号を逆にすると、$k=-1$も適することが分かります。

4.11
完全数については、問題文中で説明されているので、その意味をしっかり理解しましょう。この説明にしたがって式をたてていくと、(2)は容易です。

(3)不等式にある数(または文字)をかけるとき、それが負であった場合は不等号の向きが変わってしまいます。したがって、与えられた不等式にx^2-x-1をかけるときには、x^2-x-1の正負が$\mathrm{x}\geq 2$でどうなるのかを述べる必要があります。

(4)とりあえず、完全式の定義にしたがって式を立てていきます。
→dについてまとめられるので、$\mathrm{d}=\cdots$としてみると、(3)からdの範囲が絞られることが分かります。素数は、1を含まないということに注意しましょう。

(5)とりあえず、完全式の定義にしたがって式を立てていきます。
→項数が多いので、e,fの値を具体的に求めていってそれが素数にならない、ということを示すのは不可能です。
→式を立てた際に出てくる数 2 に注目して、両辺が偶数になるのか、それとも奇数になるのかを考えて、立てた式に矛盾が生じることを導きます。

4.12
(1)与式は２次方程式なので、実際に答えを出すことができます。出した答えから、c が無理数であることが言えます。もしくは、「c が無理数でない、つまり有理数である」と仮定して、これが矛盾することを導くという手もあります。
→c が有理数であると仮定したときに、$\mathrm{c}=\frac{s}{r}$ $(r,s$は互いに素$)$などと分数表記をするのは定石です。

(2)与式より、$\mathrm{n}=2$のときは$a_n=b_n=1$となることが分かります。また、どんな自然数 n でも成り立つことを証明することから、数学的帰納法を使えばよいのではないかと考えます。

(3)似た形の式が 2 つある場合は、その和や差をとることで答えが見えてくる場合が多いです。
→今回も、2 式はかなり似ています。また、差をとればc^nを消去することができるので、今回は 2 式の差をとって整理しようと考えます。
→cは無理数であるのに対し、a,bは整数(有理数)であることに注目します。

(4)a_{mn}とa_nの関係について知りたいので、c^{mn}とc^nの関係を調べます。
→$c^{mn}=(c^n)^m$として計算しようと思いつければ簡単です。

4.13
(1)「～が無理数であることを証明せよ。」
→「～が有理数である」と仮定して矛盾を示す、背理法を使います。

(2)まず、$\mathrm{P(x)}$と(x^3-2)とを絡めた式を作ります。($\mathrm{P(x)}=(x^3-2)Q(x)+ax^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c}$ …①)
→$\mathrm{x}=\sqrt[3]{2}$を①の両辺に代入したとき、$ax^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c}=0$ となれば$\mathrm{P(x)}$は(x^3-2)でわれることになります。

→(1)で示した、「$\sqrt[3]{2}$は無理数である」という事実を念頭において解き進めていきましょう。

4.14
問題文がやや長いので、内容を整理しつつ理解することが第一です。
→$\mathrm{M}=\mathrm{n}M_1+a_1$　,　$M_1=nM_2+a_2$　,　$M_2=nM_3+a_3$　,　⋯　, $M_{k-1}=nM_k+a_k=a_k$ となります。…①

(1) 解答のように、M が n 進法で表されていることが分かればよいのですが、初見ではなかなか気づきません。
→問題式から読み取った①を利用して考えます。１つ１つ代入していくと、
$\mathrm{M}=\mathrm{n}M_1+a_1=n^2M_2+na_2+a_1=n^3M_3+n^2a_3+na_2+a_1=\cdots$　となり、結果はここから予想できます。

(2)「$\mathrm{f(M)}\leq\mathrm{M}$であることを示せ」とあります。
→「$\mathrm{M}-\mathrm{f(M)}\geq 0$であること」が示せたらよいでしょう。
→(1)で求めたMの式を使って整理していきます。このときに、k の値によって式変形の仕方が変わってきます。注意しましょう。

また、等号成立のときの条件は、$\mathrm{k}=1$です。これは、$\mathrm{M}=a_1$となるときであり、Mをnでわったときの商が 0 であるということから、Mとnを使ってその条件を表せます。

(3)合同式が使えない場合は、次のことを利用して解いてもよいでしょう。
「k が自然数のとき、$n^k-1=(n-1)(n^{k-1}+n^{k-2}+\cdots+n+1)$ が成り立つ。」　これを覚えておくと便利です。右辺を展開すればこの式が成り立つことはすぐにわかるので、証明などをせずにそのまま使って構わないでしょう。

(4)(5)　こちらは、(3)を利用して合同式を使う解き方以外のやりかたでは、解くことが難しいです。
→「$\mathrm{M}-\mathrm{f(M)}$が$\mathrm{n}-1$で割り切れる」
→「M と f(M)を$\mathrm{n}-1$で割ったときの余りが一致する」ということです。
→$\mathrm{M}\equiv\mathrm{f(M)}(\mathrm{mod}\ \mathrm{n}-1)$ となり、これを繰り返し使っていくことで比較的簡単に求められます。

4.15
mは整数、つまり$[\mathrm{m}]=<\mathrm{m}>=\mathrm{m}$になることから、$[\mathrm{x}+\mathrm{m}]=[\mathrm{x}]+\mathrm{m}$，$<\mathrm{x}+\mathrm{m}>=<\mathrm{x}>+\mathrm{m}$ …①となることに注意しましょう。この関係がわかっていれば、(1)は簡単です。

(2)与式を証明するためには、左辺の[nx]をどうにかしてバラバラにしたいので、整数部分と少数部分に分けます。
→$\mathrm{x}=\mathrm{m}+\alpha$　(m：整数、$0\leq\alpha<1$) とおけばよくて、このとき$\mathrm{nx}=\mathrm{nm}+\mathrm{n}\alpha$となります。
→$\mathrm{n}\alpha$がどのようになるかも捉えたいので、$\frac{i}{n}\leq\alpha<\frac{i+1}{n}$　などと分母を n にした分数ではさめば、[nx]の値を、[]を外して表すことができます。
→左辺の[]が外れたので、今までのx の表し方を参考にして右辺の[]も外していこうと考えます。

(3)　(2)では[]について考えていましたが、ここでは<>について考えます。

→(2)(3)は問題が似ているので同様にできると考えて、$x = m + \alpha$　などと(2)と同じ置き換え方で計算していけるだろうと予想します。

→この方法でももちろんできるのですが、[]と◇の違いについて考えてみると、[x]はxより大きい整数のこと、<x>はxより小さい整数のことです。つまり、xよりも大きいか小さいか、という点が変わります。

→(3)では、$x = m - \alpha$と、(2)とは符号を逆にしてみれば、(3)も都合よく計算が進められるのではと考えて、このようにおいたほうが実際にうまくできます。

(ただし、問題を見た段階でここまで考えるのはなかなか難しいので、$x = m + \alpha$で計算を進めてしまって構いません。)

(4)ぱっと見ても解法は思いつきそうにありませんし、そのまま解けそうにもありません。

→(2)(3)を利用するのでは、と考えます。

→(2)(3)では、[]と◇が出てきているので、(4)の与式も、一度[]と◇を使った式に直してみます。その後は、

4.16

まず初めに、問題文を見ると数列についての漸化式が並んでいるので、数学的帰納法でできるのではないか、と思いつくはずです。

→試しに数学的帰納法で考えてみると…

[Ⅰ]a_1とa_2は互いに素、$a_3 = p(p+q)$より、a_2とa_3も互いに素

[Ⅱ]a_{2k-1}とa_{2k}、a_{2k}とa_{2k+1}がそれぞれ互いに素と仮定すると、$a_{2k+1} = p(a_{2k-1} + a_{2k})$ 、

$a_{2k+2} = q(a_{2k} + a_{2k+1}) = p(qa_{2k-1} + a_{2k}) + qa_{2k}$　となります。

→a_{2k+1}とa_{2k+2}が互いに素であるか判断するのは難しい…

→違うやり方で解くしかなさそうです。

ここで、次の事実を使うことが必要になります。

「aとbの最大公約数は、aと$b - ka$（k:整数）の最大公約数に等しい」…①(簡単な証明は、解説p.45を参照)

さらに、aとbの最大公約数を(a,b)と表記することにします。このとき、最終的には$(a_m, a_{m-1}) = 1$ を目指したいので、問題文に与えられた漸化式と①の変形を使用することで、

$\left(a_{2j-1}, a_{2j}\right) = \cdots = \left(a_{2j-3}, a_{2j-2}\right) = \cdots = (a_1, a_2) = 1$ となると予想します。

→この予想にしたがって、式変形をしていきます。

*最終的に何を求めたいのか、ということを考えつつ、上記の予想をしていきましたが、この予想はかなり難しいです。解説を読んで、何をしているのかということを理解できればよいでしょう。