東邦大学入試問題

2013 年数学

解答・解説編

①多項式

○原則

１．◆剰余の定理

整式$f(x)$を$x-a$で割った余りは、$f(a)$となります。

整式$f(x)$を$ax-b\ (a\neq 0)$で割った余りは、$f\left(\frac{b}{a}\right)$となります。

○解答・解説

【方針】

剰余の定理から求める余りは$P(2)$となります。その為に、最初の条件を使って$P(x)$に関する式をたてます。

【解説】

$f(x)=x^9-1$とおきます。

x^9-1を$x+1$で割ったときの余りは、剰余の定理から

$$f(-1)=(-1)^9-1=-2$$

商は$P(x)$なので

$$x^9-1=(x+1)P(x)-2$$

$$x^9+1=(x+1)P(x)\cdots①$$

剰余の定理より$P(x)$を$x-2$で割った余りは$P(2)$なので、①に$x=2$を代入して

$$2^9+1=(2+1)P(2)$$

$$\therefore\ P(2)=\frac{513}{3}=\underline{171}$$

②三角形

○原則

１．◆三角形の成立条件

3つの実数a,b,cを3辺とする三角形が存在する

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a < b + c \\ b < c + a \\ c < a + b \end{cases}$$

○解答・解説

【方針】

原則に従って、三角形の成立条件から不等式を 3 つたてます。それら連立不等式を解いていきます。

【解説】

$104,\ 5x,\ x^2$ を 3 辺とする三角形が存在するには、2 辺の長さの和が残りの 1 辺の長さより大きくなればよいので

$$\begin{cases} 104 < 5x + x^2 \cdots ① \\ 5x < x^2 + 104 \cdots ② \\ x^2 < 104 + 5x \cdots ③ \end{cases}$$

また、$5x$ は辺の長さなので　$x > 0\ \cdots ④$

以上の連立不等式を解きます。

①より、

$$x^2 + 5x - 104 > 0$$
$$(x + 13)(x - 8) > 0$$
$$x > 8\ (\because\ ④)$$

②より、

$$x^2 - 5x + 104 > 0$$
$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 104 > 0$$
$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{391}{4} > 0$$

この不等式は、すべての実数x で成立します。

③より、

$$x^2 - 5x - 104 < 0$$
$$(x - 13)(x + 8) < 0$$
$$-8 < x < 13$$

以上より①②③④を満たすxの範囲は

$\underline{8 < x < 13}$

③三角比

○原則

1．◆三角比の相互関係

Ⅰ）$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

Ⅱ）$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

Ⅲ）$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

○解答・解説

【方針】

$\sin\theta$，$\cos\theta$に関する方程式が与えられているので、三角比の相互関係を使えば、$\sin\theta$，$\cos\theta$の値をそれぞれ求めることができます。

【解説】

与えられた条件と、三角比の相互関係を使って$\sin\theta$，$cos\theta$の値を求めます。

$$7\sin\theta + \cos\theta = 5 \cdots ①$$
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \cdots ②$$

①を②に代入して、

$$\sin^2\theta + (5 - 7\sin^2\theta) = 1$$
$$25\sin^2\theta - 35\sin\theta + 12 = 0$$
$$(5\sin\theta - 4)(5\sin\theta - 3) = 0$$
$$\sin\theta = \frac{4}{5},\quad \sin\theta = \frac{3}{5}$$

$\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ のとき、①に代入して$\cos\theta = 5 - 7\cdot\dfrac{4}{5} = -\dfrac{3}{5}$

$\sin\theta = \dfrac{3}{5}$のとき同様にして、$\cos\theta = 5 - 7\cdot\dfrac{3}{5} = \dfrac{4}{5}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$より、$\cos\theta \geqq 0$ なので、

$$\sin\theta = \frac{3}{5},\quad \cos\theta = \frac{4}{5}$$

よって、

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \frac{\frac{3}{5}}{1+\frac{4}{5}} + \frac{\frac{4}{5}}{1+\frac{3}{5}}$$

$$= \frac{3}{9} + \frac{4}{8} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

$$= \underline{\frac{5}{6}}$$

-----参考--

$\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$は対称式なので、 $\sin\theta + \cos\theta$, $\sin\theta\cos\theta$ を計算して代入する方法もあります。つまり

$$\sin\theta + \cos\theta = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$$

$$\sin\theta\cos\theta = \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{12}{25}$$

より

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \frac{\sin\theta\,(1+\sin\theta) + \cos\theta\,(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)\,(1+\sin\theta)}$$

$$= \frac{\sin\theta + \cos\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta}{1 + \sin\theta + \cos\theta + \sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\frac{7}{5} + 1}{1 + \frac{7}{5} + \frac{12}{25}} = \underline{\frac{5}{6}}$$

④平面図形と三角比

○原則

１．◆加法定理

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

２．◆相加平均・相乗平均の関係

$a>0,\ b>0$ のとき

$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$　(等号成立は、$a=b$ のとき)

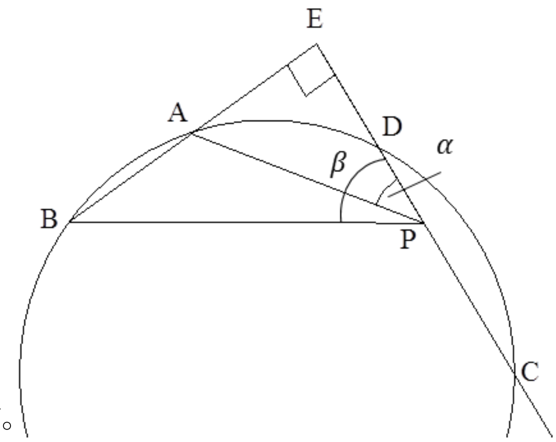
○解答・解説

【方針】

∠APB は鋭角なので、tan ∠APB が最大になるとき∠APB も最大になることを利用します。tan ∠APB の最大値は相加平均・相乗平均の関係から求められます。等号の成立条件より、そのときの EP の長さが計算できます。

【解説】

$\mathrm{EP}=x$ とします。tan ∠APB をx で表すことを考えます。



直角三角形△AEP で、$\angle\mathrm{APE}=\alpha$ とすると

$$\tan\alpha=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EP}}=\frac{5}{x}$$

直角三角形△BEP で、$\angle\mathrm{BPE}=\beta$ とすると

$$\tan\beta=\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EP}}=\frac{9}{x}$$

また α,β は、$0^\circ<\alpha<\beta<90^\circ$ を満たします。

$$\tan\angle\mathrm{APB}=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

$$=\frac{\frac{9}{x}-\frac{5}{x}}{1+\frac{9}{x}\cdot\frac{5}{x}}=\frac{4}{x+\frac{45}{x}}$$

tan ∠APB が最大となるとき、分母は最小となるので、

$x>0$ より、相加平均・相乗平均の関係から

$$x+\frac{45}{x} \geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{45}{x}} = 6\sqrt{5}$$

従って、$\tan\angle\mathrm{APB} \leqq \dfrac{4}{6\sqrt{5}} = \dfrac{2}{3\sqrt{5}}$

$\tan\angle\mathrm{APB}$ が最大になるとき、つまり等号が成立するのは

$$x=\frac{45}{x}$$

のとき、すなわち

$$x^2=45$$

$$x=3\sqrt{5}\ (\because\ x>0)$$

このとき $\angle\mathrm{APB}$ も最大となり、$\mathrm{EP}=3\sqrt{5}$ です。

最後に、$\mathrm{EP}=3\sqrt{5}$ のとき点 P が線分 CD 上にあることを確認します。
方べきの定理より

$$\mathrm{ED}\cdot\mathrm{EC}=\mathrm{EA}\cdot\mathrm{EB}=5\cdot 9=45$$

$3\sqrt{5}=\mathrm{EP}<\mathrm{ED}<\mathrm{EC}$ とすると、$\mathrm{ED}\cdot\mathrm{EC}>45$ となり不適です。
$\mathrm{ED}<\mathrm{EC}<\mathrm{EP}=3\sqrt{5}$ とすると、$\mathrm{ED}\cdot\mathrm{EC}<45$ となり不適です。

従って、$\mathrm{ED}<\mathrm{EP}<\mathrm{EC}$ となり点 P は線分 CD 上にあります。

$$\therefore \mathrm{EP}=3\sqrt{5}$$

⑤確率

○原則

１．◆反復試行

1 回の試行で事象 A が起こる確率をpとします。この試行をn回繰り返して行うとき、ちょうど事象 A がr回起こる確率は

$$_{n}C_{r}p^{r}(1-p)^{n-r}$$

○解答・解説

【方針】

P(2, 0), P(2, 1), P(2, 2) を求めて、それらの和を計算します。それぞれの場合において、サイコロの目がどのように出るのか具体的に考えます。また、サイコロを 4 回振るのは、反復試行となります。

【解説】

サイコロを 4 回投げて、原点から各点に移動する確率をそれぞれ求めます。

ⅰ）点(2, 0)に移動するとき

x 軸方向に 2 進み、y 軸方向には進まないので

1 または 2 の目が 2 回出て、5 または 6 の目が 2 回出ればよい。

このときの確率は

$$P(2,\ 0) = {}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = {}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^4$$

ⅱ）点(2, 1)に移動するとき

x 軸方向に 2 進み、y 軸方向に 1 進むので

1 または 2 の目が 2 回出て、3 または 4 の目が 1 回、5 または 6 の目が 1 回出ればよい。

このときの確率は

$$P(2,\ 1) = {}_4C_2\cdot{}_2C_1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = {}_4C_2\cdot{}_2C_1\left(\frac{1}{3}\right)^4$$

ⅲ）点(2, 2)に移動するとき

x 軸方向に 2 進み、y 軸方向に 2 進むので

1 または 2 の目が 2 回出て、3 または 4 の目が 2 回出ればよい。

このときの確率は

$$P(2,\ 2) = {}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = {}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^4$$

ⅰ）ⅱ）ⅲ）より

$$\sum_{k=0}^{2} P(2,\ k) = P(2,\ 0) + P(2,\ 1) + P(2,\ 2)$$

$$= {}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^4 + {}_4C_2\cdot{}_2C_1\left(\frac{1}{3}\right)^4 + {}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^4$$

$$= (6 + 12 + 6)\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \underline{\frac{8}{27}}$$

⑥数列

○原則

1．◆群数列

数列$\{a_m\}$を、第n群の項数がb_nとなるように群に分けます。

第n群の最初の項は

$$k=\sum_{l=1}^{n-1} b_l \text{ とおくと、} a_{k+1} \text{ となります。}$$

○解答・解説

【方針】

規則性を見つけて群に分けます。第 250 項が第n群にあるとして不等式をたて、その不等式を満たす自然数nを求めます。第 250 項が第n群にあるとき、その第n群の最初の項から何番目にあるかは、250 から第$n-1$群までにあるすべての項数を引けば求まります。

【解説】

次のように、各群に分けます。

$$\frac{1}{2},\ \Big|\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{2},\ \Big|\ \frac{5}{6},\ \frac{5}{4},\ \frac{5}{2},\ \Big|\ \frac{7}{8},\ \frac{7}{6},\ \frac{7}{4},\ \frac{7}{2},\ \Big|\ \frac{9}{10},\ \frac{9}{8},$$

第 250 項が第n群にあるとします。第 1 群から第$n-1$群までの各項数の和は

$$1+2+3+\cdots+n-1=\frac{1}{2}n(n-1)$$

また、n群までの和は

$$1+2+3+\cdots+n-1=\frac{1}{2}n(n+1)$$

群	1 群	2 群		…	$n-1$ 群			n 群				
項数	1 個	2 個		…	$n-1$ 個			n 個				
値	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	…	$\frac{2n-3}{2n-2}$	…	$\frac{2n-3}{2}$	$\frac{2n-1}{2n}$	…	?	…	$\frac{2n-1}{2}$
全体番号	1	2	3	…		…	$\frac{1}{2}n(n-1)$		…	250	…	$\frac{1}{2}n(n+1)$

第 250 項はその間にあるので

$$\frac{1}{2}n(n-1) < 250 \leqq \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$n(n-1) < 500 \leqq n(n+1)$$

この不等式を満たす自然数nを求めますが、だいたいn^2とみて、

$20^2 = 400,\ 21^2 = 441$ と検討をつけると

$n = 22$ のとき、$22 \cdot 21 = 462,\quad 22 \cdot 23 = 506$

となり、不等式を満たすので第 250 項は第 22 群にあります。

また、第 21 群までの項数は

$$\frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 22 = 231 \text{ 個}$$

より、第 250 項は第 22 群の $250 - 231 = 19$ 番目となります。

次に、第n群の一般項a_kを求めます。分子は$2n-1$、分母は、初項$2n$, 交差-2の等差数列なので、$2n + (k-1)(-2)$

よって、

$$a_k = \frac{2n-1}{2n-2(k-1)}$$

$n = 22, k = 19$ のとき

$$a_{19} = \frac{2 \cdot 22 - 1}{2 \cdot 22 - 2(19-1)} = \underline{\frac{43}{8}}$$

⑦二項定理

○原則

1．◆二項定理

$$(a+b)^n = a^n + {}_nC_1 a^{n-1} b + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_nC_{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

一般項　${}_nC_k a^k b^{n-k}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$

$(a+b+c)^n$ の展開式

一般項　$\dfrac{n!}{p!\,q!\,r!} a^p b^q c^r$ $(p + q + r = n)$

○解答・解説

【方針】

展開式の一般項を二項定理を利用して、文字で表します。x^4y^5 となるように文字の値を求めます。

【解説】

$(1-x)^5(1+y)^6\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^7$ の展開式の一般項を求めます。

$(1-x)^5$ の一般項は、${}_5C_k(-x)^k$ $(k=0,1,2,\cdots,5)$

$(1+y)^6$ の一般項は、${}_6C_ly^l$ $(l=0,1,2,\cdots,6)$

$\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^5$ の一般項は、$\dfrac{7!}{m!\,n!\,(7-m-n)!}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^m\left(\dfrac{1}{y}\right)^n$

$\left(m.n=0,1,2,\cdots,7 \text{ かつ } m+n\leqq 7\right)$

従って、与式の展開式の一般項は

$$
\begin{aligned}
&{}_5C_k(-x)^k\cdot{}_6C_ly^l\cdot\frac{7!}{m!\,n!\,(7-m-n)!}\left(-\frac{1}{x}\right)^m\left(\frac{1}{y}\right)^n\\
&=(-1)^{k+m}{}_5C_k{}_6C_l\frac{7!}{m!\,n!\,(7-m-n)!}x^{k-m}y^{l-n}
\end{aligned}
$$

x^4y^5 となるのは、$k-m=4,\ l-n=5$ のときです。

これを満たすk,l,m,n を求めます。

$k=m+4\leqq 5$ から、$m=0,\ 1$ $\therefore$ $(k,\ m)=(4,\ 0),\ (5,\ 1)$

$l=n+5\leqq 6$ から、$n=0,\ 1$ $\therefore$ $(l,\ n)=(5,\ 0),\ (6,\ 1)$

これらから

$$(k,\ l,\ m\ ,\ n)=(4,\ 5,\ 0,\ 0),\ (4,\ 6,\ 0,\ 1),\ (5,\ 5,\ 1,\ 0),\ (5,\ 6,\ 1,\ 1)$$

よって、求める係数は

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{4+0}{}_5C_4\cdot{}_6C_5\cdot\frac{7!}{0!\,0!\,7!}+(-1)^{4+0}{}_5C_4\cdot{}_6C_6\cdot\frac{7!}{0!\,1!\,6!}\\
&\qquad+(-1)^{5+1}{}_5C_5\cdot{}_6C_5\cdot\frac{7!}{1!\,0!\,6!}+(-1)^{5+1}{}_5C_5\cdot{}_6C_6\cdot\frac{7!}{1!\,1!\,5!}\\
&=5\cdot 6+5\cdot 7+6\cdot 7+7\cdot 6\\
&=30+35+42+42=\underline{149}
\end{aligned}
$$

⑧指数・対数

○原則

１．◆指数法則

$a>0,\ b>0,\ r,s$は有理数とします。

Ⅰ）$a^r a^s = a^{r+s}$　Ⅱ）$(a^r)^s = a^{rs}$　Ⅲ）$(ab)^r = a^r b^r$

◆対数の性質

$a,b,c>0,\ a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0,\ M,N>0$ とします。

Ⅰ）$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$　Ⅱ）$\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

Ⅲ）$\log_a M^k = k\log_a M$　Ⅳ）$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

◆解と係数の関係

Ⅰ）二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を$\alpha,\ \beta$ とします。このとき

$$\alpha+\beta = -\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

Ⅱ）2 数$\alpha,\ \beta$ に対して、$p=\alpha+\beta,\ q=\alpha\beta$ とすると

2 次方程式 $t^2-pt+q=0$ の 2 解は、$\alpha,\ \beta$ となります。

○解答・解説

【方針】

与えられた条件を、対数・指数の性質を使って式変形します。すると、和と積の形から二次方程式の実数解の存在条件に帰着します。

【解説】

真数条件より、$z>0$, $\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}>0$

つまり、$z>0,\ x+y>0 \cdots$①

$$\log_4 z = -\frac{1}{2}+\log_2\sqrt{\frac{x+y}{2}}$$

$$\frac{\log_2 z}{\log_2 4} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_2\frac{x+y}{2} = -\frac{1}{2}\log_2 2+\frac{1}{2}\log_2\frac{(x+y)}{2}$$

$$\frac{1}{2}\log_2 z = \frac{1}{2}\log_2 \frac{x+y}{4}$$

$$z = \frac{x+y}{4}$$

$$x + y = 4z \cdots ②$$

次に、

$$27^{xy-1} = 3^{z+2xy+2}$$

$$3^{3(xy-1)} = 3^{z+2xy+2}$$

$$3(xy-1) = z + 2xy + 2$$

$$xy = z + 5 \cdots ③$$

②③より、解と係数の関係から x, y は二次方程式

$$t^2 - 4zt + z + 5 = 0$$

の実数解です。従って判別式 D は 0 以上となるので

$$\frac{D}{4} = (2z)^2 - (z+5) \geqq 0$$

$$4z^2 - z - 5 \geqq 0$$

$$(4z-5)(z+1) \geqq 0$$

$$z \leqq -1,\ \ z \geqq \frac{5}{4}$$

ただし、①より

$$\underline{z \geqq \frac{5}{4}}$$

⑨極限

○原則

1．◆対数の性質

$a, b, c > 0,\ \ a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0,\ \ M, N > 0$ とします。

Ⅰ） $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$　　Ⅱ） $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

Ⅲ） $\log_a M^k = k \log_a M$　　Ⅳ） $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

◆区分求積法

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$

$$= \int_a^b f(x)dx$$

とくに、$a = 0,\ b = 1$のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$$

○解答・解説

【方針】

$\dfrac{f(n)}{n}$ を計算していきます。そのとき原則の対数の性質を使います。

式変形を進めると、対数の和が現れ区分求積法の形になります。原則を用いて計算するとX の値が定まります。e^X は、対数の定義から求められます。

【解説】

対数の性質を使って式変形していきます。

$$_nC_k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{k!}$$

$$f(n) = \log_e({}_{2n}C_n) + n\left\{1 - \log_e\left(\frac{n}{4!}\right)\right\} + \log_e(n!)$$

$$= \log_e\frac{(2n)!}{(2n-n)!\,n!} + n - n(\log_e n - \log_e 4!) + \log_e(n!)$$

$$= \log_e\frac{(2n)!}{n!\,n!} + n - \log_e n^n + n\log_e 4! + \log_e(n!)$$

$$= \log_e\frac{(2n)!\,(n!)}{n!\,n!\,n^n} + n + n\log_e 4!$$

$$= \log_e\frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdots(2n-n+1)}{n^n} + n + n\log_e 4!$$

$$= \log_e\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n-1)(n+n)}{n^n} + n + n\log_e 4!$$

$$= \log_e\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+2}{n}\right)\cdots\left(\frac{n+n-1}{n}\right)\left(\frac{n+n}{n}\right) + n + n\log_e 4!$$

$$= \log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\left(1+\frac{n}{n}\right) + n + n\log_e 4!$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \log_e \left(1 + \frac{k}{n}\right) + n + n\log_e 4!$$

従って

$$\frac{f(n)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log_e \left(1 + \frac{k}{n}\right) + 1 + \log_e 4!$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log_e \left(1 + \frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \log_e(1+x)\,dx$$

$$= [(1+x)\log_e(1+x)]_0^1 - \int_0^1 (1+x)\cdot\frac{1}{1+x}dx$$

$$= 2\log_e 2 - 1$$

よって

$$X = \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n} = 2\log_e 2 - 1 + 1 + \log_e 4! = \log_e 4\cdot 4! = \log_e 96$$

$$e^X = e^{\log_e 96} = \underline{96}$$

⑩微分

○原則

1．◆微分係数

関数 $y = f(x)$ において、このグラフ上の異なる 2 点をA$(a,\ f(a))$, B$(b,\ f(b))$ $(a \neq b)$ とします。

点 A における微分係数$f'(a)$ は次の式で定義されます。

$$f'(a) = \lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

○解答・解説

【方針】

この極限は不定形なので、式変形する必要があります。そのとき、微分係数の定義式が現れるようにします。まずは、通分してみましょう。

【解説】

$$\frac{1}{h}\left\{\frac{f(2+h)}{f(2-h)}-\left(\frac{3-h}{3+h}\right)^3\right\}=\frac{1}{f(2-h)(3+h)^3}\cdot\frac{f(2+h)(3+h)^3-f(2-h)(3+h)^3}{h}$$

ここで、$g(x)=f(2+x)(3+x)^3$とおきます。

$$\begin{aligned}\frac{f(2+h)(3+h)^3-f(2-h)(3+h)^3}{h}&=\frac{g(h)-g(-h)}{h}\\&=\frac{g(h)-g(0)+g(0)-g(-h)}{h}\\&=\frac{g(h)-g(0)}{h}+\frac{g(-h)-g(0)}{-h}\end{aligned}$$

微分係数の定義から

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=g'(0)$$

また、$h'=-h$ とおくと、$h\to 0$ のとき $h'\to 0$ なので

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(-h)-g(0)}{-h}=\lim_{h'\to 0}\frac{g(h')-g(0)}{h'}=g'(0)$$

よって、

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{f(2+h)}{f(2-h)}-\left(\frac{3-h}{3+h}\right)^3\right\}\\&\qquad=\lim_{h\to 0}\frac{1}{f(2-h)(3+h)^3}\cdot\left\{\frac{g(h)-g(0)}{h}+\frac{g(-h)-g(0)}{-h}\right\}\\&\qquad=\frac{2g'(0)}{f(2)\cdot 3^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g'(x)&=f'(2+x)(3+x)^3+f(2+x)\cdot 3(3+x)^2\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4+x}}\cdot(3+x)^3+\sqrt{4+x}\cdot 3(3+x)^2\end{aligned}$$

より

$$g'(0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4}}\cdot 3^3+\sqrt{4}\cdot 3\cdot 3^2=\frac{9\cdot 3^3}{4}$$

よって

$$\frac{2g'(0)}{f(2)\cdot 3^3}=\frac{2}{\sqrt{4}\cdot 3^3}\cdot\frac{9\cdot 3^3}{4}$$
$$=\underline{\frac{9}{4}}$$

⑪平面図形・領域

○原則

１．◆2 曲線が接する条件

2 曲線$y=f(x),\ y=g(x)$ が、$x=t$ である点 P で接する

$\Leftrightarrow$

2 曲線$y=f(x),\ y=g(x)$ が、$x=t$ である点 P で共通接線を持つ

$\Leftrightarrow$

$f'(t)=g'(t)$ かつ $f(t)=g(t)$

２．◆接線の方程式

関数$y=f(x)$上の点$(a,f(a))$ における接線の方程式は、

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

３．◆法線の方程式

関数$y=f(x)$上の点$(a,f(a))$ における法線の方程式は、

$$y=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a)$$

４．◆円の接線の方程式

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点(s,t)における接線の方程式は、

$$sx+ty=r^2$$

○解答・解説

【方針】

$\dfrac{y}{(x-2)^2}=k$ とおくと、放物線 $y=k(x-2)^2$ となります。

この放物線と領域が共有点を持つときに k が最大となるのは、この放物線の開き具合が一番狭くなるときで、そのことを図から読み取ります。

【解説】

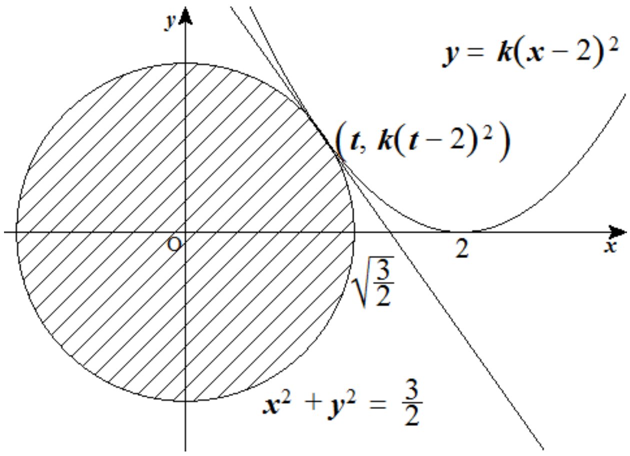
図を用いて考えていきます。

領域 $x^2+y^2 \leqq \dfrac{3}{2}$ は、中心が原点で半径 $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ の円の内部と円周上になります。

また、

$\dfrac{y}{(x-2)^2}=k$ とおくと、$y=k(x-2)^2$ であり、頂点が $(2,\ 0)$ の放物線です。

この領域と放物線 $y=k(x-2)^2$ が共有点を持つときの k の最大値を図から読み取ります。



k が最大となるのは

円 $x^2+y^2=\dfrac{3}{2}$ と放物線$y=k(x-2)^2$

が第一象限で接するときです。

このとき共通接線を持つので、接点におけるそれぞれの接線の方程式を求めてそれらが等しいことを使います。

そこで、接点を

$(t, k(t-2)^2)$

とおきます。

接点は、第一象限にあることから、

$0<t<\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ です。

$y'=2k(x-2)$ より、放物線における接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= 2k(t-2)(x-t)+k(t-2)^2 \\ &= 2k(t-2)x-2kt(t-2)+k(t-2)^2 \\ &= 2k(t-2)x-k(t-2)(2t-t+2) \\ &= 2k(t-2)x-k(t-2)(t+2) \cdots ① \end{aligned}$$

次に、円における接線の方程式は、

$$tx+k(t-2)^2y=\frac{3}{2}$$

$k \neq 0,\ t \neq 2$ より

$$y = -\frac{t}{k(t-2)^2}x + \frac{3}{2k(t-2)^2} \cdots ②$$

①②は等しいので、傾きとy切片が等しくなり

$$\begin{cases} 2k(t-2) = -\dfrac{t}{k(t-2)^2} \cdots ③ \\ -k(t-2)(t+2) = \dfrac{3}{2k(t-2)^2} \cdots ④ \end{cases}$$

④÷③より

$$-\frac{t+2}{2} = -\frac{3}{2t}$$

$$t(t+2) = 3$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$(t+3)(t-1) = 0$$

$$t = -3,\ 1$$

$0 < t < \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ より $t = 1$

③に代入して

$$-2k = -\frac{1}{k}$$

$k^2 = \dfrac{1}{2}$　よって $k > 0$ より、$k = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

従って、$\dfrac{y}{(x-2)^2}$ の最大値は$\underline{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

------参考--

接点$(t, k(t-2)^2)$ における放物線の法線が、円の中心を通ることを利用する方法もあります。

法線の方程式は、

$$y = -\frac{1}{2k(t-2)}(x-t) + k(t-2)^2$$

円の中心$(0,\ 0)$ を通るので

$$0=-\frac{1}{2k(t-2)}(0-t)+k(t-2)^2$$

整理して

$$k^2(t-2)^3=-\frac{t}{2}\cdots⑤$$

また、$(t,k(t-2)^2)$ は円上の点でもあるので

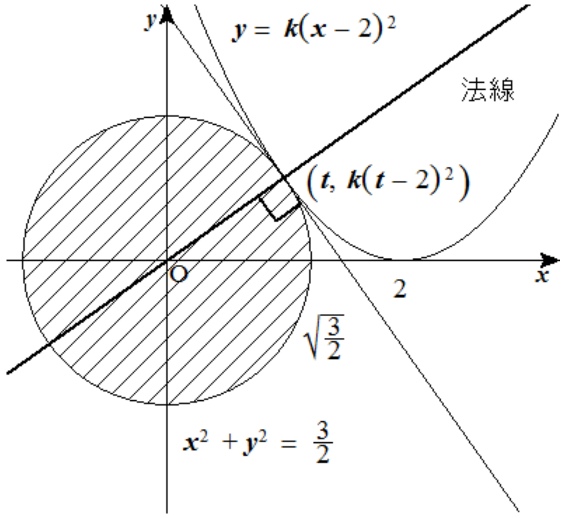
$$t^2+\{k(t-2)^2\}^2=\frac{3}{2}$$

$$t^2+k^2(t-2)^4=\frac{3}{2}\cdots⑥$$

⑤を⑥に代入して

$$t^2-\frac{t}{2}(t-2)=\frac{3}{2}$$

$$t^2+2t-3=0$$



が得られ、あとは同様です。

⑫行列

○原則

1．◆逆行列

行列$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} は、$\Delta=ad-bc\neq 0$ のとき存在して

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

○解答・解説

【方針】

与えられた条件から、$a,\ b,\ c,\ d$ と行列式に関する方程式をたてます。それらの連立方程式を解いていきます。

【解説】

行列 A の行列式をΔ とします。つまり、$\Delta=ad-bc$ です。

A の逆行列は

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

なので、条件から

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

両辺Δして整理すると

$$\begin{pmatrix} \Delta a - d & \Delta b + b \\ \Delta c + c & \Delta d - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\Delta & 6\Delta \\ 6\Delta & 3\Delta \end{pmatrix}$$

よって、

$$\begin{cases} \Delta a - d = -3\Delta \cdots ① \\ \Delta b + b = 6\Delta \cdots ② \\ \Delta c + c = 6\Delta \cdots ③ \\ \Delta d - a = 3\Delta \cdots ④ \end{cases}$$

①＋④より

$$(\Delta - 1)a + (\Delta - 1)d = 0$$

$$(\Delta - 1)(a + d) = 0$$

$a + d > 0$ より、$\Delta = 1 \ \therefore \ ad - bc = 1 \cdots ⑤$

①④に代入すると

$$a - d = -3 \cdots ⑥$$

②③に代入して

$$2b = 6 \quad \therefore \quad b = 3 \cdots ⑦$$

$$2c = 6 \quad \therefore \quad c = 3 \cdots ⑧$$

⑥⑦を⑤に代入して

$$ad - 9 = 1 \quad \therefore \quad ad = 10 \cdots ⑨$$

ここで、

$$\begin{aligned}(a + d)^2 &= (a - d)^2 + 4ad \\ &= (-3)^2 + 4 \cdot 10 \ (\because \ ⑥⑨) \\ &= 49\end{aligned}$$

$a + d > 0$ より、$a + d = 7$

以上より、$\underline{a + d = 7,\ ad - bc = 1}$

⑬ベクトル

○原則

１．◆ベクトルの内積

$\vec{a} \neq \vec{0},\ \vec{b} \neq \vec{0}$、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とします。$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$

２．◆複素数の積

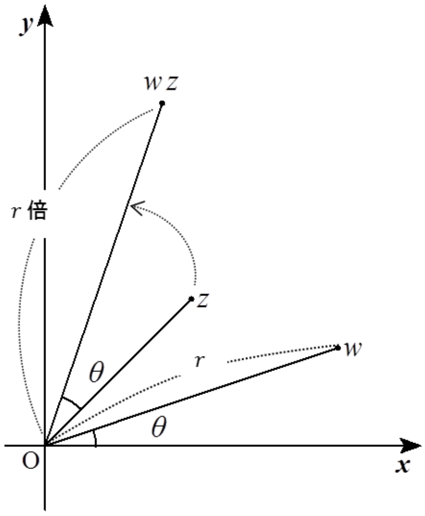
複素平面上の点を z、$w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とするとき、wz の表す点は、点 z を原点 O を中心に角 θ だけ回転し $|z|$ を r 倍した点となります。

◆一般の点における回転

複素平面上に、2 点 $\alpha,\ \beta$ があります。点 β を点 α 中心に角 θ だけ回転した点を z とします。

このとき

$$\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha} = \cos\theta + i\sin\theta$$



○解答・解説

【方針】

$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおいて、s, t に関する方程式をたてていきます。方程式をたてるには、内積を使います。この問題の条件から 3 角形の 3 辺の長さが分かり、余弦定理を使えば角についても求めることができます。長さと角とベクトルを関連付けるのは内積ですね。

【解説】

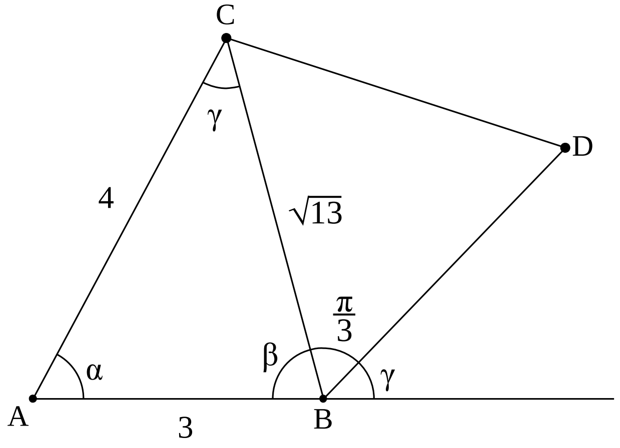
$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ $(s,\ t$ は実数$)$ とおきます。

また、$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = (s-1)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdots ①$$

次に、$\angle\mathrm{BAC}=\alpha, \angle\mathrm{ABC}=\beta, \angle\mathrm{BCA}=\gamma$ とおいて
$\triangle\mathrm{ABC}$ における余弦定理から、それぞれの余弦を求めます。



$$\cos\alpha=\frac{3^2+4^2-\left(\sqrt{13}\right)^2}{2\cdot3\cdot4}=\frac{1}{2}$$

$0<\alpha<\pi$ より、$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$

$$\cos\beta=\frac{3^2+\left(\sqrt{13}\right)^2-4^2}{2\cdot3\cdot\sqrt{13}}=\frac{1}{\sqrt{13}}$$

$$\cos\gamma=\frac{4^2+\left(\sqrt{13}\right)^2-3^2}{2\cdot4\cdot\sqrt{13}}=\frac{5}{2\sqrt{13}}$$

さて①より、両辺 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の内積をとると

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=(s-1)\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$=(s-1)\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

この内積を計算していきます。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ のなす角は$\pi-\left(\beta+\dfrac{\pi}{3}\right)=\pi-(\beta+\alpha)=\gamma$

従って

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|\cos\gamma=3\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{5}{2\sqrt{13}}=\frac{15}{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos\alpha=3\cdot4\cdot\frac{1}{2}=6$$

よって

$$\frac{15}{2}=(s-1)3^2+t\cdot6$$

$$6s+4t=11\ \cdots②$$

次に①より、両辺 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の内積をとると

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=(s-1)\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|\cos\frac{\pi}{3}=\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{1}{2}=\frac{13}{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cos(\pi-\beta)=\sqrt{13}\cdot 3\cdot(-\cos\beta)$$
$$=\sqrt{13}\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{13}}\right)=-3$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos\gamma=\sqrt{13}\cdot 4\cdot\frac{5}{2\sqrt{13}}=10$$

よって

$$\frac{13}{2}=(s-1)(-3)+t\cdot 10$$
$$6s-20t=-7\ \cdots③$$

②−③より

$$24t=18\quad\therefore t=\frac{3}{4}$$

②に代入して

$$6s+3=11\quad\therefore\ s=\frac{4}{3}$$

従って

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

[別解]

【方針】

複素平面上で考えてみます。A を原点に B を実軸上にある点と設定して、C, D を決めます。それぞれの点における複素数を$\alpha(=0)$, β, γ,δ として

$$\delta=s\beta+t\gamma$$

を満たす、実数s,t を求めます。そのs, t が

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

となります。

【解説】

複素平面上にこの図形をのせます。各点における複素数を$\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$, $\mathrm{C}(\gamma)$, $\mathrm{D}(\delta)$とします。$\alpha=0$, $\beta=3$ としても一般性を失いません。

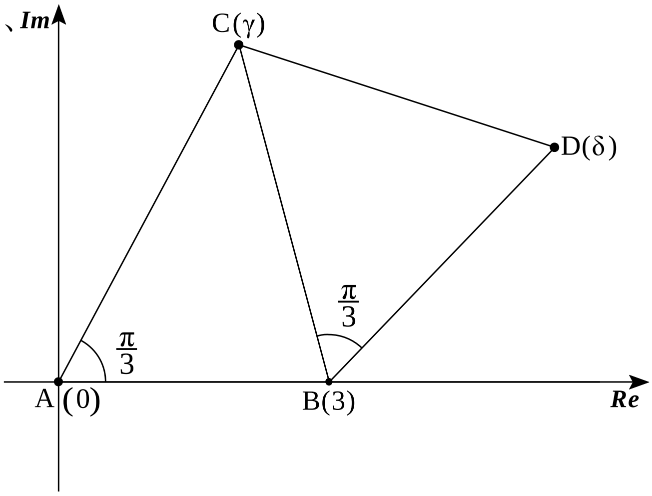
△ABC における余弦定理から

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{3^2+4^2-\left(\sqrt{13}\right)^2}{2\cdot 3\cdot 4}=\frac{1}{2}$$

$0<\angle\mathrm{BAC}<\pi$ より、$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{3}$

よって、γ はβ を原点 α を中心に$\frac{\pi}{3}$回転し、

$\frac{4}{3}$倍したものです。



従って、

$$\gamma = \frac{4}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\beta$$

$$= 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}i$$

次に、△BCD は正三角形なので

点 C を点 B 中心に$\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ 回転すると点 D となります。

よって

$$\frac{\delta - \beta}{\gamma - \beta} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\delta = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3}i\right)\left(2 + 2\sqrt{3}i - 3\right) + 3$$

$$= \frac{11 + 3\sqrt{3}i}{2}$$

ここで、$s,\ t$ を実数として

$$\delta = s\beta + t\gamma$$

を満たすs, t を求めます。今求めた値を代入して

$$\frac{11 + 3\sqrt{3}i}{2} = s \cdot 3 + t \cdot \left(2 + 2\sqrt{3}i\right)$$

$$11 + 3\sqrt{3}i = 6s + 4t + 4\sqrt{3}ti$$

よって、

$$\begin{cases} 11 = 6s + 4t \cdots ① \\ 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}t \cdots ② \end{cases}$$

②より、$t = \frac{3}{4}$

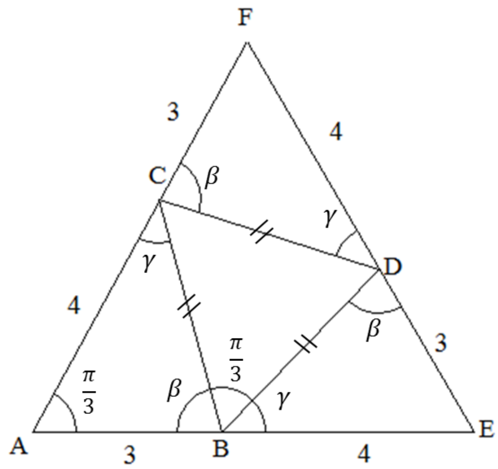
①に代入して、$s = \frac{4}{3}$

従って、

$$\delta = \frac{4}{3}\beta + \frac{3}{4}\gamma \text{ より、} \underline{\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}}$$

--------参考--

幾何的に考えてみます。△ABC と合同な△EDB、△FCD を図のようにとると△AEF は正三角形となります。



ED: DF = 3: 4 より

$$\overrightarrow{AD} = \frac{4\overrightarrow{AE} + 3\overrightarrow{AF}}{7}$$

また

$$\overrightarrow{AE} = \frac{7}{3}\overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{AF} = \frac{7}{4}\overrightarrow{AC}$$

より

$$\overrightarrow{AD} = \frac{4 \cdot \frac{7}{3}\overrightarrow{AB} + 3 \cdot \frac{7}{4}\overrightarrow{AC}}{7} = \underline{\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}}$$

⑭微分積分

○原則

１．◆定積分の公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

○解答・解説

【方針】

定積分は、ある定数となるので文字でおきます。その文字を使って $f(x)$ を表します。この問題では、$f(x)$ は 2 次関数になります。そして実際に定積分を計算していきますが、絶対値をはずす必要があるので、グラフを書いて場合分けします。

【解説】

$$A=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}|f(t)|dt\cdots①$$ とおきます。このとき$A\geqq 0$ です。

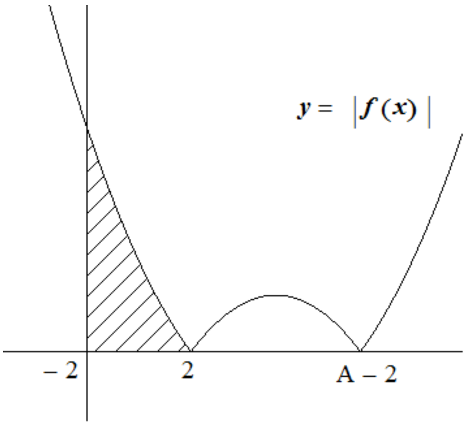
$$\begin{aligned}f(x)&=x^2-4-(x-2)A\\&=(x+2)(x-2)-(x-2)A\\&=(x-2)(x+2-A)\end{aligned}$$

この$f(x)$ を①に代入して

$$A=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}|(x-2)(x+2-A)|\,dx$$

$$4A=\int_{-2}^{2}|(x-2)(x+2-A)|\,dx$$

右辺の定積分を計算して、A についての方程式をたてます。その際、絶対値をはずすために場合分けをします。

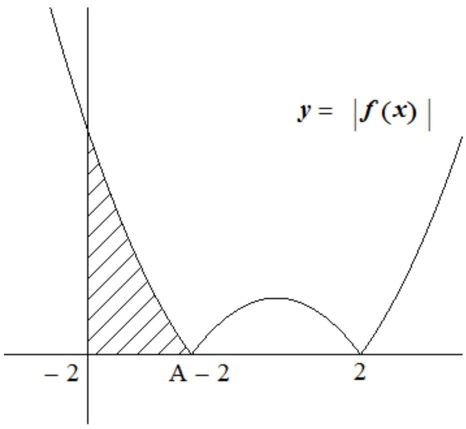


i）$A-2\geqq 2$ のとき、すなわち$A\geqq 4$

$$\begin{aligned}I&=\int_{-2}^{2}(x-2)(x+2-A)\,dx\\&=\int_{-2}^{2}\{(x-2)(x+2)-A(x-2)\}\,dx\\&=-\frac{\{2-(-2)\}^3}{6}-\left[\frac{A}{2}(x-2)^2\right]_{-2}^{2}\\&=-\frac{32}{3}+8A=4\mathrm{A}\end{aligned}$$

よって、$A=\frac{8}{3}$

しかし、$A\geqq 4$ を満たさないので不適。



ⅱ）$-2\leqq A-2<2$ のとき、すなわち$0\leqq A<4$

$B=A-2$ として

$$\begin{aligned}I&=\int_{-2}^{B}(x-2)(x-B)\,dx-\int_{B}^{2}(x-2)(x-B)\,dx\\&=\int_{-2}^{B}(x-B+B-2)(x-B)\,dx-\left\{-\frac{(2-B)^3}{6}\right\}\end{aligned}$$

$$= \int_{-2}^{B} \{(x-B)^2 + (B-2)(x-B)\}\,dx + \frac{(4-A)^3}{6}$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x-B)^3\right]_{-2}^{B} + (B-2)\left[\frac{1}{2}(x-B)^2\right]_{-2}^{B} + \frac{(4-A)^3}{6}$$

$$= -\frac{1}{3}(-2-B)^3 - (B-2)\cdot\frac{1}{2}(-2-B)^2 - \frac{(A-4)^3}{6}$$

$$= \frac{A^3}{3} - \frac{(A-4)A^2}{2} - \frac{(A-4)^3}{6}$$

$$= \frac{1}{6}\{2A^3 - 3(A-4)A^2 - (A-4)^3\}$$

$$= \frac{1}{6}(-2A^3 + 24A^2 - 48A + 64)$$

$$= -\frac{1}{3}A^3 + 4A^2 - 8A + \frac{32}{3} = 4A$$

$$A^3 - 12A^2 + 36A - 32 = 0$$

$$(A-2)^2(A-8) = 0$$

$0 \leqq A < 4$ より　$A = 2$

以上から、$f(x) = x(x-2)$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}-2\right) = \underline{\frac{5}{4}}$$

⑮二次曲線

○原則

１．◆双曲線の焦点と漸近線

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ に対して、

焦点 $\left(\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0\right)$　漸近線 $y = \pm\frac{b}{a}x$

◆双曲線の接線の方程式

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点(s,t)における接線の方程式は

$$\frac{s}{a^2}x - \frac{t}{b^2}y = 1$$

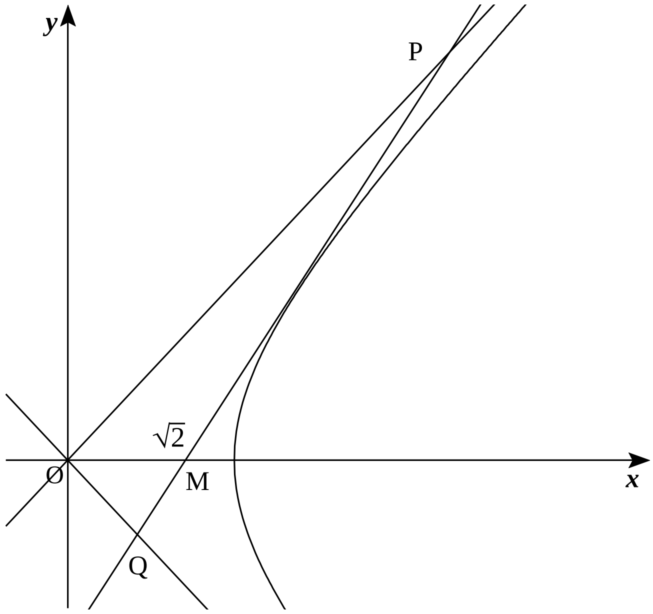
○解答・解説

【方針】

2 点 P,Q の座標を設定して 2 点間の距離の公式で計算します。今回、直線 PQ が双曲線に接するという条件を使わなくても解けます。

【解説】

双曲線mは、x軸に対して対称です。接線lの接点が第一象限にあるとしても一般性を失いません。このとき、点 P は第一象限、点 Q は第四象限にあります。



また、双曲線の漸近線は

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

なので、実数s, tを用いて

$$\mathrm{P}\left(s,\ \frac{b}{a}s\right),\ \mathrm{Q}\left(t,\ -\frac{b}{a}t\right)\ \ (s > t > 0)$$

とおけます。よって

$$\mathrm{PQ}^2 = (s-t)^2 + \left(\frac{b}{a}s + \frac{b}{a}t\right)^2$$

$$= (s+t)^2 - 4st + \left(\frac{b}{a}\right)^2 (s+t)^2$$

$$= \left\{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right\}(s+t)^2 - 4st \cdots ①$$

次に△OPQ の面積から

三角形の面積

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (a_1, b_1)$ $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (a_2, b_2)$ のとき

△OPQ の面積 Sは

$$S = \frac{1}{2}|a_1 b_2 - b_1 a_2|$$

$$\frac{1}{2}\left| s\cdot\left(-\frac{b}{a}t\right) - \left(\frac{b}{a}s\right)\cdot t \right| = \frac{b}{a}\cdot st = 3\sqrt{6}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{3\sqrt{6}}{st} \cdots ②$$

また

$$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ} = \sqrt{s^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 s^2}\sqrt{t^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 t^2}$$

$$= st\left\{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right\}$$

$$\therefore\ \ st\left\{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right\}=15\cdots③$$

②を③に代入して

$$st\left\{1+\left(\frac{3\sqrt{6}}{st}\right)^2\right\}=15$$

$$st+\frac{54}{st}=15$$

$$(st)^2+54=15st$$

$$(st)^2-15st+54=0$$

$$(st-6)(st-9)=0$$

$$st=6,9$$

これらを②に代入すると、

$st=6$ のとき、$\dfrac{b}{a}=\dfrac{3\sqrt{6}}{6}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$st=9$ のとき、$\dfrac{b}{a}=\dfrac{3\sqrt{6}}{9}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$b>a>0$ より、$\dfrac{b}{a}>1$ なので $st=9$ のときは不適

従って、

$$st=6\cdots④,\ \ \frac{b}{a}=\frac{\sqrt{6}}{2}\cdots⑤$$

さらに、点R$\left(\sqrt{2},\ 0\right)$ とすると△OPQ=△OPR+△ORQ なので

$$3\sqrt{6}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{b}{a}s+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{b}{a}t$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{b}{a}(s+t)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}(s+t)\ \ (\because\ ⑤)$$

$$\therefore\ \ s+t=6\sqrt{2}\cdots⑥$$

④⑤⑥を①に代入して

$$\mathrm{PQ}^2 = \left\{1+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2\right\}(6\sqrt{2})^2 - 4\cdot 6$$

$$= \left(1+\frac{3}{2}\right)36\cdot 2 - 4\cdot 6$$

$$= 5\cdot 36 - 4\cdot 6 = 12\cdot(15-2) = 12\cdot 13$$

$$\therefore\ \ \underline{\mathrm{PQ} = 2\sqrt{39}}$$

[別解]

【方針】

△OPQ において余弦定理を用いて PQ を求めます。つまり

$$\mathrm{PQ}^2 = \mathrm{OP}^2 + \mathrm{OQ}^2 - 2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\cdot\cos\angle\mathrm{POQ}$$

$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}$ は与えられています。△OPQ の面積から $\sin\angle\mathrm{POQ}$ が求められ、$\cos\angle\mathrm{POQ}$ も計算できます。また、$\mathrm{OP}^2+\mathrm{OQ}^2 = (\mathrm{OP}+\mathrm{OQ})^2 - 2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}$ とみて、$\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}$ の値が得られれば、結局 PQ^2 が計算できることになります。

【解説】

△OPQ において、$\angle\mathrm{POQ} = \alpha$ とします。まず $\sin\alpha$ の値を求めましょう。
その前に、α の取り得る範囲を確認しておきます。

双曲線の漸近線は

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

であり、$b > a > 0$ なので直線 $y = \frac{b}{a}x$ の傾きは 1 より大きくなります。

つまり、この直線と x 軸の正の向きとのなす角は $\frac{\pi}{4}$ より大きくなります。

対称性を考えて、$\alpha > 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

よって、$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \cdots ⑦$

さて、△OPQ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\sin\alpha = 3\sqrt{6}$$

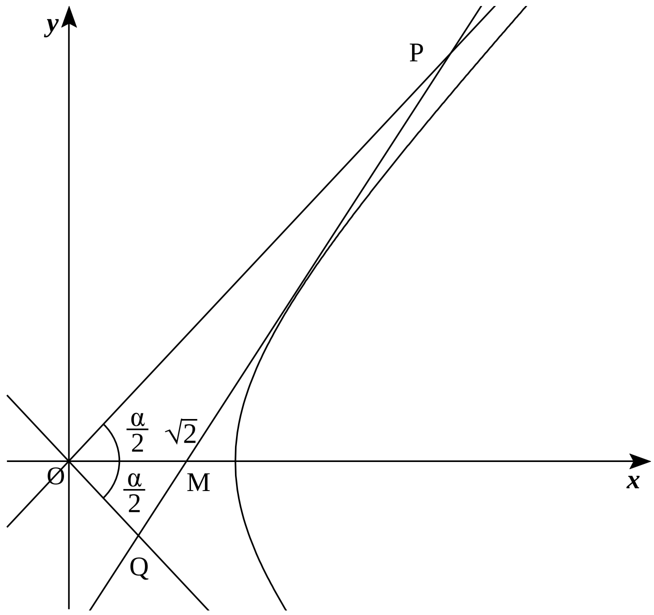
$\frac{1}{2}\cdot 15\cdot \sin\alpha = 3\sqrt{6}$

$\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

$\cos^2\alpha = 1-\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2 = \dfrac{1}{5^2}$

⑦より、$\cos\alpha < 0$ なので

$\cos\alpha = -\dfrac{1}{5}\cdots$⑧



次に、点R$(\sqrt{2},\ 0)$として△OPQ=△OPR+△ORQ となることを利用します。
漸近線は、x 軸で対称なので

$$\angle\mathrm{MOP} = \angle\mathrm{MOQ} = \frac{\alpha}{2}$$

△OPR の面積S'，△ORQ の面積S'' とおいて

$$S' = \frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR}\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$S'' = \frac{1}{2}\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OR}\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{OQ}\cdot\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\begin{aligned}3\sqrt{6} &= S' + S'' \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{OQ}\cdot\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cdot(\mathrm{OP}+\mathrm{OQ})\end{aligned}$$

ここで、⑧と半角の公式から

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{1-\left(-\frac{1}{5}\right)}{2} = \frac{3}{5}$$

⑦より、$\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ なので $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$

よって

$$3\sqrt{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot (\mathrm{OP} + \mathrm{OQ})$$

$$\mathrm{OP} + \mathrm{OQ} = 6\sqrt{5} \cdots ⑨$$

次に、△POQ において余弦定理より

$$\begin{aligned}
\mathrm{PQ}^2 &= \mathrm{OP}^2 + \mathrm{OQ}^2 - 2\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ} \cdot \cos\alpha \\
&= (\mathrm{OP} + \mathrm{OQ})^2 - 2\,\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ} - 2\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ} \cdot \cos\alpha \\
&= (\mathrm{OP} + \mathrm{OQ})^2 - 2\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ}(1 + \cos\alpha) \\
&= \left(6\sqrt{5}\right)^2 - 2 \cdot 15 \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \\
&= 36 \cdot 5 - 3 \cdot 8 = 12 \cdot (15 - 2) \\
&= 12 \cdot 13
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \ \underline{\mathrm{PQ} = 2\sqrt{39}}$$