

第1問

原則1. 力学的エネルギー保存の法則 → (1) に利用

質量 m の物体が速さ v で高さ h の所を運動しているとき、空気抵抗などの影響が無視できるなら、速さ v や高さ h が変化しても、運動エネルギー ($\frac{1}{2}mv^2$) と位置エネルギー (mgh) の和である力学的エネルギー ($\frac{1}{2}mv^2 + mgh$) は変化しない (ここで、 g は重力加速度 ($g = 9.8 \text{ [m/s}^2\text{]}$) である)。これを力学的エネルギー保存の法則と言う。

例えば、鉛直方向に運動する質量 m の物体において、高さ h_1 のときの速さを v_1 、高さ h_2 のときの速さを v_2 とすると、次式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 \dots\dots①$$

ただし、人工衛星のように地表から極めて高いところを運動する質量 m の物体の位置エネルギーは、 $-G\frac{Mm}{r}$ (G : 万有引力定数 ($G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ [N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2\text{]}$)、 M : 地球の質量、 r : 地球の中心からの距離) と表す必要があり、式①の代わりに次式を用いる。

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{Mm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{Mm}{r_2} \dots\dots②$$

原則2. 万有引力と重力加速度 → (1)・(2) に利用

質量 m [kg] と M [kg] の2つの物体が距離 r [m] 離れているとき、2物体間に働く万有引力の大きさ F [N] は、次式で表される。

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \dots\dots①$$

ここで、 G は万有引力定数 ($G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ [N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2\text{]}$) である。

なお、地表での重力加速度を g ($= 9.8 \text{ [m/s}^2\text{]}$)、地球の半径を r [m]、地球の質量を M [kg] とすると、質量 m [kg] の物体に働く重力 $F = mg$ [N] と式①が等しくなり、次式を得る。

$$F = mg = G\frac{Mm}{r^2} \rightarrow g = \frac{GM}{r^2} \dots\dots②$$

原則3. 運動の方程式と重力 → (2) に利用

一般に、質量 m の物体に力 F が加わるとき、次式のように、物体は加速度 a の等加速度運動をする。

$$ma = F$$

なお、質量 m の物体が速さ v (角振動数 ω)、半径 r の円運動をするとき、その運動方程式は次式で表される。

$$m\frac{v^2}{r} = F \quad (mr\omega^2 = F)$$

また、一般に質量 m の物体には鉛直下向きに大きさ mg (g は重力加速度) の重力がはたらく。よって、例えば、鉛直下向きに重力以外の力 F が加わっている物体の運動方程式は、次式のようになる。

$$ma = mg + F$$

(1)

【方針】

「地表から高度 1600 km」と言う文言より、位置エネルギーは $-G \frac{Mm}{r}$ のように表す必要があることに気づく。この点を踏まえて、「原則 1. 力学的エネルギー保存の法則」や「原則 2. 万有引力と重力加速度」の知識を利用して解く。

【解答】

1: イー5、ロー0、ハー3

【解説】

求める初速を v_0 [m/s]、ロケットの質量を m_0 [kg]、地球の質量を M [kg]、万有引力定数を G [N・m²/kg²]、地表での重力加速度を g [m/s²]、地球の半径を r [m] とおく。高度 1600km の位置における運動エネルギーが 0 であるとき、力学的エネルギー保存の法則より、次式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}m_0v_0^2 - G \frac{Mm_0}{r} = 0 - G \frac{Mm_0}{r+1.6 \times 10^6}$$

$$\therefore v_0 = \sqrt{\frac{3.2 \times 10^6}{r(r+1.6 \times 10^6)} GM}$$

ここで、 $GM = gr^2$ を上式に代入すると、次式を得る。

$$v_0 = \sqrt{\frac{3.2 \times 10^6 \times gr}{r+1.6 \times 10^6}} = \sqrt{\frac{3.2 \times 10^6 \times 9.8 \times 6.4 \times 10^6}{6.4 \times 10^6 + 1.6 \times 10^6}} = \sqrt{2^2 \times 0.8^2 \times 9.8 \times 10^6}$$

$$= 2 \times 0.8 \times \sqrt{9.8} \times 10^3 = 2 \times 0.8 \times 3.13 \times 10^3 = 5.00 \times 10^3 \approx 5.0 \times 10^3 \text{ [m/s]}$$

(2)

【方針】

「円軌道を周回する」と言う文言より、等速円運動の運動方程式が成り立つことに気づく。この点を踏まえて、「原則 3. 運動の方程式と重力」や「原則 2. 万有引力と重力加速度」の知識を利用して解く。

【解答】

2: イー6、ロー4、ハー3

【解説】

人工衛星の質量を m [kg]、速さを v [m/s] とおくと、次式で表される等速円運動の運動方程式が成り立つ。

$$m \frac{v^2}{r+3.4 \times 10^6} = G \frac{Mm}{(r+3.4 \times 10^6)^2}$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{GM}{r+3.4 \times 10^6}}$$

ここで、 $GM = gr^2$ を上式に代入すると、次式を得る。

$$v = \sqrt{\frac{gr^2}{r+3.4 \times 10^6}} = \sqrt{\frac{9.8 \times (6.4 \times 10^6)^2}{6.4 \times 10^6 + 3.4 \times 10^6}} = 6.4 \times 10^6 \times \sqrt{\frac{9.8}{9.8 \times 10^6}} = 6.4 \times 10^3 \text{ [m/s]}$$

第2問

原則3. 運動の方程式と重力 (前述) → (1)・(2) に利用

原則4. クーロン力とローレンツ力 → (1)・(2) に利用

距離 r [m] 離れた2つの点電荷の電荷が q [C] と Q [C] であるとき、点電荷の間には次式で表されるクーロン力 F [N] が働く。

$$F = k \frac{qQ}{r^2}$$

なお、上式中の k は比例定数で、真空中(空气中)の値は $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \times 10^9$ [N・m²/C²]

である。また、電荷 q [C] をもつ粒子が電場 E [N/C] の中にあるとき、この粒子が電場から受けるクーロン力 F [N] は、次式で表される。

$$F = qE$$

一方、電荷 q [C] をもつ粒子が速さ v [m/s] で磁場 B [T] の中で運動するとき、この粒子が磁場から受けるローレンツ力 F [N] は、次式で表される。

$$F = qvB \sin \theta$$

ここで、 θ は粒子速度の向きと磁場の向きがなす角度である。

(1)

【方針】

「電子の進行方向と電場の方向とのなす角度が 45° 」と言う文言より、電場を横切るのに要する時間が計算できることに気づく。この点を最初の手掛かりとして、「原則4. クーロン力とローレンツ力」や「原則3. 運動の方程式と重力」の知識などを利用して解く。

【解答】

3 : イー-1、ロ-1、ハ- 3

【解説】

電場の領域を出るのに要する時間 t [s] は

$$t = \frac{2.5 \times 10^{-3}}{1.0 \times 10^3 \times \frac{1}{\sqrt{2}}} = 2.5\sqrt{2} \times 10^{-6} \text{ [s]}$$

となる。電場の強さを E [N/C]、電場方向の電子の加速度を a [m/s²] とすると、電子の運動方程式は

$$9.11 \times 10^{-31} \times a = -1.6 \times 10^{-19} \times E$$

となり、これを解くと、

$$a = \frac{-1.6 \times 10^{-19}}{9.11 \times 10^{-31}} \times E = \frac{-1.6}{9.11} \times 10^{12} \times E \text{ [m/s}^2\text{]}$$

となる。

電場を出るときに電場方向の速度成分が 0 となるから、等加速度直線運動の式は

$$0 = 1.0 \times 10^3 \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1.6}{9.11} \times 10^{12} \times E \times 2.5\sqrt{2} \times 10^{-6}$$

となり、これを解くと、

$$E = \frac{1.0 \times 10^3 \times 9.11}{\sqrt{2} \times 1.6 \times 10^{12} \times 2.5 \sqrt{2} \times 10^{-6}} = 1.13 \times 10^{-3} \approx 1.1 \times 10^{-3} \text{ [N/C]}$$

と求まる。

(2)

【方針】

「電子は半円の軌道を描き、入射した場所から 0.50 m 離れた磁場の領域から出てきた」と言う文言より、円軌道の半径が 0.25 m であることに気づく。この点に着目して、「原則 4. クーロン力とローレンツ力」や「原則 3. 運動の方程式と重力」の知識を利用して解く。

【解答】

4 : イー2、ロー3、ハー -8

【解説】

円軌道の半径が 0.25 m であるから、等速円運動の運動方程式は

$$9.11 \times 10^{-31} \times \frac{(1.0 \times 10^3)^2}{0.25} = 1.6 \times 10^{-19} \times 1.0 \times 10^3 \times B$$

となり、これを解くと、

$$B = \frac{9.11 \times 10^{-31} \times 1.0 \times 10^3}{0.25 \times 1.6 \times 10^{-19}} = 22.7 \times 10^{-9} \approx 2.3 \times 10^{-8} \text{ [T]}$$

と求まる。

第3問

原則5. 熱力学第1法則とモル比熱 → (1)~(3) に利用

気体に与えた熱量 Q は、気体の内部エネルギーの増加量 ΔU と、気体が外部にした仕事 W の和に等しい。すなわち、次式が成り立つ。

$$Q = \Delta U + W \cdots \cdots \textcircled{1}$$

なお、単原子分子気体の内部エネルギー U は次式で表される。ここで、 n は物質量、 R は気体定数、 T は温度である。

$$U = \frac{3}{2}nRT$$

また、気体が外部にした仕事 W は次式で表される。ここで、 p は圧力、 ΔV は体積の増加量である。

$$W = p\Delta V$$

ところで、単原子分子気体の定圧変化では、 $W = nR\Delta T$ となるので、式①は次式のように変形できる。なお、 $C_p = \frac{5}{2}R$ を定圧モル比熱と言う。

$$Q = \Delta U + nR\Delta T = \frac{3}{2}nR\Delta T + nR\Delta T = \frac{5}{2}nR\Delta T = nC_p\Delta T$$

また、単原子分子気体の定積変化では、 $W = 0$ となるので、式①は次式のように変形できる。なお、 $C_v = \frac{3}{2}R$ を定積モル比熱と言う。

$$Q = \Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T = nC_v\Delta T$$

(1)~(3)

【方針】

いずれも熱力学における基本的な計算問題である。したがって、「原則5. 熱力学第1法則とモル比熱」の知識を利用して順に解いてゆく。

【解答】

(1) 5 : イ-2、ロ-0、ハ-4、ニ-1

(2) 6 : イ-8、ロ-6、ハ-1、ニ-3

(3) 7 : イ-6、ロ-1、ハ-2、ニ-3

【解説】

(1)

定圧モル比熱 C_p [J/(mol·K)]、定積モル比熱 C_v [J/(mol·K)] と気体定数 R [J/(mol·K)] の間には、次式の関係がある。

$$C_p = C_v + R$$

よって、定積モル比熱は

$$C_v = 28.7 - 8.31 = 20.39 \approx 2.04 \times 10^1 \text{ [J/(mol·K)]}$$

となる。

(2)

吸収した熱量 Q [J] は、定圧モル比熱を用いて、

$$Q = 3.00 \times 28.7 \times (400 - 300) = 8.61 \times 10^3 \text{ [J]}$$

となる。

(3)

定積モル比熱を用いて内部エネルギーの増加 ΔU [J] を求めると、

$$\Delta U = 3.00 \times 20.39 \times (400 - 300) = 6.117 \times 10^3 \approx 6.12 \times 10^3 \text{ [J]}$$

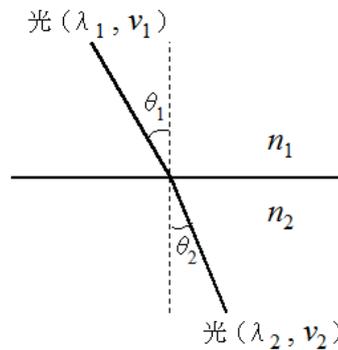
となる。

第4問

原則6. 屈折の法則 → (1) に利用

空気中(屈折率: n_1) および屈折率 n_2 の媒体中を光が進行する場合、その境界面で光は屈折する。このとき、境界面と垂直な面と空気中(媒体中)の光の進行経路がなす角を θ_1 (θ_2)、空気中(媒体中)の光の速度を v_1 (v_2)、空気中(媒体中)の光の波長を λ_1 (λ_2) とすると、次式で表される屈折の法則が成り立つ。なお、空気中の屈折率は $n_1 = 1.0003$ であるため、 $n_1 = 1$ として計算することが多い。

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1}$$



(図は WEB 上で見つからなかったため自作)

原則7. 干渉の条件式 → (2) に利用

同じ光源から出た波長 λ [m] の光が分かれて、光路差 d [m] の2つの経路を進んだ後、同じ経路に合流したとき、この2つの光は干渉して以下のようなになる。

$d = m\lambda$ ($m = 1, 2, \dots$) の場合、2つの光は強め合う(明るくなる)。

$d = \left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda$ ($m = 1, 2, \dots$) の場合、2つの光は弱め合う(暗くなる)。

(1)・(2)

【方針】

「屈折率 1.7 のガラスに屈折率 1.2 の物質の薄膜をコーティングした」という文言より、薄膜の屈折率は空気より大きくガラスより小さいことに気づく。この点を最初の手掛かりとして、「原則6. 屈折の法則」や「原則7. 干渉の条件式」の知識を利用して順に解いてゆく。

【解答】

(1) 8 : イ-4、ロ-0、ハ-2

(2) 9 : イ-1、ロ-0、ハ-2

【解説】

(1)

薄膜中における光の波長を λ [nm] とおくと、屈折の法則より、

$$1.0003 \times 480 = 1.2 \times \lambda$$

となる。これを解くと、

$$\lambda = 400.12 \approx 4.0 \times 10^2 \text{ [nm]}$$

と求まる。

(2)

薄膜の厚さの最小値を d とする。屈折率の大小関係により、空気→薄膜の反射、薄膜→ガラスの反射はいずれも位相が π 変化するから、これらの反射による相対的な位相のずれは起きない。したがって、弱め合う条件は

$$2d = \frac{1}{2}\lambda$$

となる。これを解くと、

$$d = \frac{1}{4}\lambda = 100.03 \approx 1.0 \times 10^2 \text{ [nm]}$$

と求まる。

第5問

原則8. 原子核の崩壊 → 第5問に利用

一般に、元素記号 X の原子核を A_ZX と表す。ここで、左上の添え字 A は質量数 (=陽子数+中性子数) を、右上の添え字 Z は原子番号 (=陽子数) をそれぞれ意味する。

自然界において原子核 A_ZX が崩壊する場合、次の3種類のいずれかになる。

- ・ α 崩壊: ${}^A_ZX \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + \alpha$ (質量数が-4、原子番号が-2となり、 α 粒子 (${}^4_2\text{He}$) を放出)
- ・ β 崩壊: ${}^A_ZX \rightarrow {}^A_{Z+1}Y + \beta$ (原子番号が+1となり、 β 線 (電子) を放出)
- ・ γ 崩壊: ${}^A_ZX \rightarrow {}^A_ZX + \gamma$ (γ 線 (光子) を放出)

【方針】

放射線の種類や放射線関連の単位についての知識問題であると気づく。したがって、「原則8. 原子核の崩壊」の知識などにもとづいて、適切な語句を選ぶ。

【解答】

ア-⑧、イ-⑦、ウ-⑨、エ-①、オ-③、カ-②

【解説】

天然の放射性原子核が出す放射線には、 α 線、 β 線、 γ 線の3種類があり、 α 線はヘリウム原子核 (${}^4_2\text{He}$)、 β 線は電子、 γ 線は電磁波 (光子) である。

1秒間に1個の原子核が崩壊するときの放射能の強さを1ベクレルと言い、物質1kgあたり1Jのエネルギー吸収があるときの吸収線量を1グレイと言う。また、被曝による生物学的な影響の大きさを表す単位としては、シーベルトが使われる。シーベルトはグレイ (吸収線量) に放射線種 (α 線・ β 線・ γ 線) や対象臓器などによって決まる係数を乗じて得られる単位である。