10. 複素数平面

10.1

(1) ある複素数zに対して、$z^n = m$　(n：整数　m：実数) と表されたときは、まず$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$という形になおすことが大事です。(このとき、$r > 0$と設定しておくと便利です。)

また、$n = 1,2,\ldots,19$のとき、$z^n \neq 1$ということは、$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = (\cos n\theta + i\sin n\theta) \neq 1$　なので、$n\theta$が 360 の倍数になるとき($n\theta = 360^\circ \times l$ …①) を除かなければいけません。
→$n = 20$のときは、$n\theta = 20\theta = 360^\circ \times k$ …②　となります。(k, lは整数)
→①、②からk, lの関係式を作って、条件にあった kを探します。

(2) $360^\circ = 72^\circ \times 5$であることに注目します。

10.2

(1) $2\pi = \frac{2\pi}{7} \times 7$であることに注目します。

(3) すべての項を通分して、一度に計算するのはかなり大変です。
→(2) では、(3) の 6 つの分数のうち 2 つをまとめると簡単に計算できたことから、ほかの 2 つの分数もまとめればうまく計算できるのでは、と予想します。
→(2) ではα^7が登場したことでうまく計算できたので、α^7が登場するような分数の組み合わせを選びます。

(4) まずは、前問と同じようにできないか、考えるでしょう。$\frac{\alpha^2}{1-\alpha} + \frac{\alpha^{12}}{1-\alpha^6} = \frac{\alpha^2-\alpha^8+\alpha^{12}-\alpha^{13}}{(1-\alpha)(1-\alpha^6)} = \cdots$　となります。この方針でも、頑張って整理すれば答えは出るでしょうが、大変です。
→(3) の式を A、(4) の式を B とすると、A-B を計算したときに、それぞれの分数が約分によって消えることが分かります。この解き方だと、簡単に B の値を出すことができます。
*(4) の考え方はやや思いつきにくいですが、似た式の和や差をとると簡単に計算できることはよくあります。ぜひ覚えておきましょう。

10.3

(2) (1) の関係より、ωはある円上の点であることが分かります。図に書き表してみましょう。

(3) $\omega^3 = (c + di)^3 = \cdots$を計算していくのは大変です。
→ωを、sin・cos で表しましょう。
*複素数の何乗かを計算するときには、sin・cos 表記にしてからド・モアブルの公式を使うと非常に簡単になります。

(4) αの値を求めたいので、与式からβを消去します。
→その後は、通常の解き方通り、$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$　とおいて、rとθの値を求めます。

10.4

(1) α, βを組み合わせた形の式の大きさについては分かっています。($|\alpha-2\beta|=2$, $|2\alpha-3\beta|=\sqrt{13}$)
→絶対値の中身をバラバラにすることで、βの大きさを求めていこうと考えます。
→与式をそれぞれ 2 乗し、展開していきます。

(2) $|\alpha|^2=r$のとき、$\bar{\alpha}=\frac{r}{\alpha}$であることが分かっていれば解けるでしょう。

(3) 原点 O を表す複素数をγとすると、向きを考慮した場合、$\angle\mathrm{BOA}$は $\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}$ に対応する角となります。

→実際は$\gamma=0$なので、$\frac{\alpha}{\beta}$を考えることになりますが、今回は角度の大きさを聞かれているので、$\frac{\beta}{\alpha}$ を考えてもかまいません。

10.5

(2) 複素数は、基本的にx, y座標に帰着できるので、計算するよりも先に、まずは図的に考えていきましょう。
→2 点 A, B を表す複素数が、それぞれα, βであるとき、(1) から$\Delta\mathrm{OAB}$の各頂点の関係について分かります。
さらに、$|\alpha+\beta|=3$であることと合わせて、図を利用して解くと簡単です。

(3) ある複素数にiをかけた複素数は、もとの複素数を時計回りに90°回転させたものです。
この問いも、図を描いて考えたほうがよさそうです。

→$\angle\mathrm{AOB}$がどんな値になるかによって、考える図形の形が変わってきます。さらに、(1) は$\frac{\beta}{\alpha}$での角度のことなので、求めた角度は線分 OA を時計回りに回転させていった時の角度のことです。どちら向きに回した時の角度であるかに注意しましょう。

10.6

公式「3 点 A, B, C を表す複素数がそれぞれα、β、γであるとき、$\angle\mathrm{ABC}$は、$\arg\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}$ …①で表される複素数の角度となる」
→①の形に注目すると、与式は「ある点を表す複素数どうしをつないで①のように表したものを通分した形」のように見えます。

→通分する前の形になおしてみて、$\arg\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_2-z_3)(z_1-z_4)}$ について考えます。

このとき、$z_1 \sim z_4$の位置関係はいろいろと考えられるので、すべての位置関係において題意を満たすか証明する必要があります。

10.7

(1) ①z が具体的に示されているので、代入して計算だけで解く　②それぞれの複素数の位置を図で表して、図を

参考に解く　の 2 通りの解き方があります。難易度はそれほど変わらないので、どちらで解いても構いません。ただし、(2)(3)は図を使って解くことになるので、流れとしては②を選択しておいたほうがよいかもしれません。

(2)最終的にはα、βの関係を求めたいので、この 2 点がどのような点であるか、条件を絞っていく必要があります。
→$z=0$にしてみると、α、βはある円上の点であることが分かります。
→その後は、zを、考えやすい点に設定して問題を考えていくと楽に解けます。(解答では、zを直線lとα、βを含む円の交点に設定しています。)

(3)ひとつの分数内にzと$\bar{z}$ が同時に存在しているのが厄介です。
→$\bar{z}$ をzになおしてしまいましょう。その後は、どんなz でも分数の値が等しくなるように、うまくα, β, γの値を定めましょう。

10.8
(1)複素数は、やはり図を利用して解いたほうがよいでしょう。
→「ω_1をz_1, z_2で表せ」とあることから、3 点 A,B,K に注目します。
→点 K は、正方形 BAPQ の中心だから、線分 AB と KB の長さの比・$\angle\mathrm{KBA}$の角度 については容易に分かります。ここから式を立てられるでしょう。

(2)複素数とベクトルは大きく関係しています。KM と LN が垂直か、長さが等しいか、ということを確かめたいので、ベクトルで考えていきます。
→ベクトルを考えるには、各点の複素数平面上の位置についての情報が必要です。K 以外の点の複素数についても(1)と同様にして求めていきましょう。

(3)ある線分上の中点を求めるのは、ベクトルの分野で習った通りです。

10.9
まずは、問題文の意味をしっかりとらえることが大切です。
複素数平面なので、$P_2=P_1+\frac{1}{2}(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$ と表せます。
→次に、$P_3=P_2+\frac{1}{4}(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)$ と表せます。ここで、$\alpha=\frac{1}{2}(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$ とおくと、
$P_2=P_1+\alpha$、　$P_3=P_2+\alpha^2=P_1+\alpha+\alpha^2$ となります。
→このあとも繰り返していくと、等比数列の和になることが分かるので、$n\to\infty$のときの座標も求められます。

10.10
複素数ωを複素数平面上に図示することが最終的な目標なので、$\omega=X+iY$などと、座標で表せるように設定します。
→(1)～(3)まで、すべて複素数zについての条件なので、x, yをX, Yでそれぞれ表せればよいのでは、と考えられます。
与式を、$z=\cdots$と変形して、X, Yを使って表します。…①

(2) $x^2+y^2>1$に、①で求めたx, yを代入するのはかなり大変です。
→$x^2+y^2=|z|$であることを思い出せれば、x, yを使うことなく範囲を求められます。

10.11
(1) iz^2は、z^2を時計回りに90°回転させた点であることに注目して、まずはz^2を計算してみます。

(2) (3)　10.10 とほぼ同様のやり方で解けます。複素数ωを複素数平面上に図示することが最終的な目標なので、$\omega=X+iY$などと、座標で表せるように設定します。
(3)は、図を描いて考察することが特に重要になってきます。

10.12
(1) ド・モアブルの公式通りです。

(2)　証明すべき式を見ると、因数分解がなされています。複素数において因数分解を使うのは、ある複素数を求めるときで、「$x^n=1$となるxにたいして、$(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)=0$が成り立つ」…①ことです。
→今回も、この因数分解を使えばよいのでは、と考えます。
→$2\pi=\frac{2\pi}{n}\times n$だから、$\alpha^n=1$　となります。さらに、$(\alpha^k)^n=1$が同様になりたちます。(k：整数)
①において、$x=\alpha^k$を代入してみると、$1\leq k\leq n-1$のとき$x=\alpha^k\neq 1$なので、$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=0$になります。
したがって、$1\leq k\leq n-1$であることより、$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=(x-\alpha)(x-\alpha^2)\ldots(x-\alpha^{n-1})$となります。
ここで、$x=1$をいれればよいわけです。
*$1\leq k\leq n-1$のkにたいして、α^kを考える、というところの発想がなかなか難しいでしょう。証明すべき式は因数分解されているので、証明の段階で①を使うのでは、というところまではぜひ思いついてほしいです。

(3)　(2) (3)の対応関係から、$1-\alpha=2\sin\frac{\pi}{n}$, …　, $1-\alpha^k=2\sin\frac{k\pi}{n}$　の関係を証明すれば(3)の式が成り立つだろう、と予想することができます。
→複素数の問題は、まず図で考えることが大事です。今回も同様にしましょう。