東京医科大学入試問題

2013年数学

解答・解説編

①小問集合

○原則

(1) ◆数列　漸化式

Ⅰ）階差形の漸化式　$a_{n+1}=a_n+f(n)$

$$\text{一般項 } a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)\quad(n\geqq 2)$$

Ⅱ）分数形の漸化式

$$a_{n+1}=\frac{\mathrm{A}a_n+\mathrm{B}}{\mathrm{C}a_n+\mathrm{D}}$$

ⅰ）$B=0$のとき、両辺の逆数をとって

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$とおきます。

ⅱ）$B\neq 0$のとき、

$x=\dfrac{\mathrm{A}x+\mathrm{B}}{\mathrm{C}x+\mathrm{D}}$の解を$x=\alpha,\beta$として、$b_n=\dfrac{1}{a_n-\alpha}$とおきます。

ただ、誘導が付くことがほとんどですのでそれに従います。

(2) ◆三角関数　半角の公式

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2},\qquad \cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2},\quad \tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

◆三角関数　3 倍角の公式

$$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta,\quad \cos 3\theta=4\cos^3\theta-4\cos\theta$$

○解答・解説

(1)

【方針】

分数形式の漸化式で、分子の定数項が 0 です。原則の形とは少々異なりますが、両辺の逆数をとってみましょう。両辺$n+1$倍すると階差形の漸化式に帰着します。

【解説】

与えられた漸化式の両辺の逆数をとりたいので、$a_n \neq 0$であることを確認しておきます。

$$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = \frac{(n+1)a_n}{(3n+1)a_n + n} \cdots ①$$

$a_1 = 1 > 0$ であり、 $a_n > 0$と仮定すると①より$a_{n+1} > 0$ 。従って、帰納的にすべての自然数nで$a_n > 0$

よって、①の両辺の逆数がとれて、

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{(3n+1)a_n + n}{(n+1)a_n} = \frac{n}{(n+1)a_n} + \frac{3n+1}{n+1}$$

両辺$n+1$倍して、

$$\frac{n+1}{a_{n+1}} = \frac{n}{a_n} + 3n + 1$$

$b_n = \dfrac{n}{a_n}$ とおくと、

$$b_{n+1} = b_n + 3n + 1$$

即ち、数列$\{b_n\}$の階差数列の一般項が$3n+1$なので、

$n \geqq 2$のとき

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(3k+1)$$

$$= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{2}\cdot(n-1)\{4 + 3(n-1) + 1\}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\cdot(n-1)(3n+2)$$

$$= \frac{3n^2 - n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(3k+1)$は

初項 4, 末項 $3(n-1)+1$

項数$(n-1)$ の等差数列の和。

これは、$n=1$のときも成立します。よって、

$$a_n = \frac{n}{b_n} = \frac{2}{3n-1}$$

$$\therefore\ a_{200} = \frac{2}{599}$$

(2)

【方針】

$\dfrac{3\theta}{2}$から、半角の公式や3倍角の公式を利用して計算ができそうです。

【解説】

3倍角の公式を使って角度を$\dfrac{\theta}{2}$にします。

$$\sin\frac{3\theta}{2} = \sin 3\cdot\frac{\theta}{2}$$

$$= 3\sin\frac{\theta}{2} - 4\sin^3\frac{\theta}{2}$$

ここで、半角の公式から

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} = \frac{1-\frac{1}{8}}{2} = \frac{7}{16}$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より $0 < \dfrac{\theta}{2} < \dfrac{\pi}{4}$ なので、

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

よって、

$$\sin\frac{3\theta}{2} = 3\cdot\frac{\sqrt{7}}{4} - 4\cdot\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^3$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{4}\left(3 - 4\cdot\frac{7}{4^2}\right) = \frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{12-7}{4} = \underline{\frac{5\sqrt{7}}{16}}$$

②小問集合

○原則

(1) ◆法線の方程式

曲線$y = f(x)$上の点$\mathrm{P}(a, f(a))$における法線の方程式は、

$$y = -\frac{1}{f'(a)}(x-a) + f(a)$$

(2) ◆平均値の定理

関数$f(x)$が閉区間$[a,\ b]$で連続、開区間$(a,\ b)$で微分可能のとき、

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\quad a<c<b$$

を満たす実数cが少なくとも一つ存在する。

○解答・解説

(1)

【方針】

条件に従って、a, b についての方程式をたてていきます。法線については、原則に従います。

【解説】

放物線$C: y=a(x-b)^2$は、点 A$\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$ を通るので、

$$\frac{3}{5}=a\left(\frac{4}{5}-b\right)^2\cdots①$$

次に、$y'=2a(x-b)$より点 A における法線の方程式は、

$$y=-\frac{1}{2a\left(\frac{4}{5}-b\right)}\left(x-\frac{4}{5}\right)+\frac{3}{5}$$

となり、原点を通るので、

$$0=-\frac{1}{2a\left(\frac{4}{5}-b\right)}\left(0-\frac{4}{5}\right)+\frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{5}a=-\frac{2}{5\left(\frac{4}{5}-b\right)}$$

$$a=-\frac{2}{3\left(\frac{4}{5}-b\right)}\cdots②$$

②を①に代入して、

$$\frac{3}{5}=-\frac{2}{3\left(\frac{4}{5}-b\right)}\cdot\left(\frac{4}{5}-b\right)^2=-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{4}{5}-b\right)$$

$$b=\frac{4}{5}+\frac{9}{10}=\frac{17}{10}$$

①に代入して、

$$a=-\frac{2}{3\cdot\left(-\frac{9}{10}\right)}=\frac{20}{27}\qquad \therefore\ \underline{a=\frac{20}{27}\quad b=\frac{17}{10}}$$

(2)

【方針】

対数方程式を普通に解こうとすると、行き詰まります。そこで、$\log(n+9)-\log(n+8)$の形に着目すると、

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}$$

とみることができるので、$f(x)=\log x$として平均値の定理を使います。自然数nを不等式でおさえて解をしぼります。

【解説】

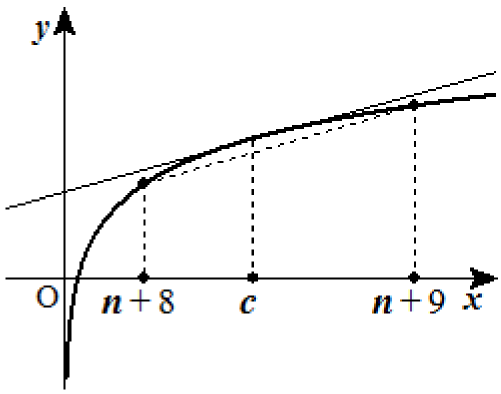
$f(x)=\log x$とおきます。(ただし、自然対数)

$$\log(n+9)-\log(n+8)=\frac{f(n+9)-f(n+8)}{(n+9)-(n+8)}$$

ここで、nは自然数なので、$f(x)$は閉区間$[n+8,\ n+9]$で連続、開区間$(n+8,\ n+9)$で微分可能です。従って、平均値の定理から、

$$\frac{f(n+9)-f(n+8)}{(n+9)-(n+8)}=f'(c)=\frac{1}{c}\ ,\ \ n+8<c<n+9\cdots③$$

となる実数cが存在します。また、



$$\log(\mathrm{n}+9)-\log(n+8)<\frac{1}{100}$$

より、

$$\frac{1}{\mathrm{c}}<\frac{1}{100}\quad \therefore\ c>100$$

③と合わせて、$100<c<n+9$なので、

$$n>91$$

nは 92 以上の自然数となります。そこで、$n=92$とすると、

$$\log(92+9)-\log(92+8)=\log 101-\log 100=\frac{1}{c}$$

かつ、$100 < c < 101$　即ち $\frac{1}{101} < \mathrm{c} < \frac{1}{100}$ なので、

$$\log(92+9)-\log(92+8) < \frac{1}{100}$$

となり与えられた不等式を満たします。よって、求める自然数nは、$\underline{n=92}$

③二次曲線

○原則

(1) ◆楕円の方程式

$$\frac{(x-x_1)^2}{a^2}+\frac{(y-y_1)^2}{b^2}=1$$

楕円は,$x=x_1$で線対称であり$y=y_1$で線対称です。

◆楕円の媒介変数表示

楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$は、

$(x,\ y)=(a\sin\theta,\ b\cos\theta)$で表すことができます。

楕円 $\frac{(x-x_1)^2}{a^2}+\frac{(y-y_1)^2}{b^2}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$は、

$(x,\ y)=(a\sin\theta+x_1,\ b\cos\theta+y_1)$で表すことができます。

(2) ◆ベクトルの内積

$\vec{a}=(x_1,y_1),\ \vec{b}=(x_2,\ y_2)$　のとき$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$

◆三角関数の最大値・最小値

関数$y=f(x)$が三角関数で表されているとき、$f(x)$の最大値・最小値を求めるには次のことを考えます。

Ⅰ）三角関数の統一…sin, cos, tan のどれか一つに統一する。

Ⅱ）角度を揃える。

Ⅲ）合成する。

○解答・解説

(1)

【方針】

3 点を楕円の方程式に代入して、連立方程式を解くという方法もありますが、計算が大変です。この問題では、楕円の対称性を利用すると、楕円の中心がただちに分かります。

【解説】

楕円Cは中心が(a, c)なので、直線$x = a,\ y = c$で線対称となります。従って、2 点A$(4, 0)$, O$(0,0)$の中点は、直線$x = a$上にあるので、

$$a = \frac{4+0}{2} = 2$$

また、2 点B$(0,2)$と O$(0,0)$の中点は、直線$y = b$上にあるので、

$$c = \frac{2+0}{2} = 1$$

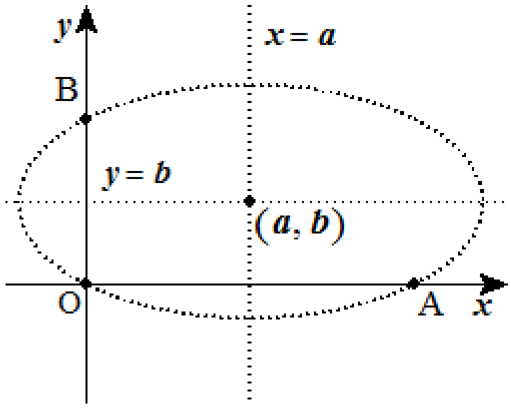
よって楕円Cは、

$$\frac{(x-2)^2}{b} + \frac{(y-1)^2}{2} = 1$$

また、点O$(0,0)$を通るので、

$$\frac{(0-2)^2}{b} + \frac{(0-1)^2}{2} = 1 \qquad \therefore b = 8$$

以上から、$\underline{a = 2,\ b = 8,\ c = 1}$



(2)

【方針】

点 P を座標で設定し、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}, \overrightarrow{\mathrm{AP}}$を成分表示します。それに従って、内積を計算します。すると、2 次関数の最小値の問題に帰着します。また、点 P の設定は、原則のように媒介変数表示を使います。

【解説】

楕円C上の点P$(x,\ y)$を媒介変数表示で、

$x = 2\sqrt{2}\cos\theta + 2,\ \ y = \sqrt{2}\sin\theta + 1\ \ (0 \leqq \theta < 2\pi)$　とおきます。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left(2\sqrt{2}\cos\theta + 2,\ \sqrt{2}\sin\theta + 1\right)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \left(2\sqrt{2}\cos\theta - 2,\ \sqrt{2}\sin\theta + 1\right)$$

より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= (2\sqrt{2}\cos\theta + 2)(2\sqrt{2}\cos\theta - 2) + \left(\sqrt{2}\sin\theta + 1\right)^2 \\ &= 8\cos^2\theta - 4 + 2\sin^2\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta + 1 \\ &= 8(1-\sin^2\theta) + 2\sin^2\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta - 3 \\ &= -6\sin^2\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta + 5 \\ &= -6\left(\sin^2\theta - \frac{\sqrt{2}}{3}\sin\theta\right) + 5 \\ &= -6\left\{\left(\sin\theta - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2 - \frac{2}{6^2}\right\} + 5 \\ &= -6\left(\sin\theta - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2 + \frac{16}{3}\end{aligned}$$

ここで、$0 \leqq \theta < 2\pi$より、$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$なので、

$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$ のとき最大値$\dfrac{16}{3}$をとります。

よって、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$の最大値は、$\underline{M = \dfrac{16}{3}}$

④小問集合

○原則

(1) ◆関数の最大値・最小値を求める

基本の考えは、グラフを書いてグラフから最大値・最小値を読み取ることです。その為に微分して増減表を書きます。

たまに、有名不等式(相加平均・相乗平均の関係など)を使って解くこともあります。

◆分数関数の扱い

$$\text{分数関数} = \frac{(\text{多項式})}{(\text{多項式})}\text{ で、(分子の次数)} \geqq \text{(分母の次数)}$$

のときは、割り算を行って、分子の次数を下げると計算がし易くなります。

(2) ◆置換積分

方法Ⅰ）$x = g(t)$ とおく。

$$\int f(x)dx = \int f(x)\frac{dx}{dt}dt = \int f\big(g(t)\big)g'(t)dt$$

方法Ⅱ）$g(x) = t$ とおく。

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int f(t)\frac{dt}{dx}dx = \int f(t)dt$$

○解答・解説

(1)

【方針】

関数$f(x)$の最小値を求めるには、微分して増減表を書きます。その増減表から、最小値を読み取ります。別解として、関数$f(x)$は分数関数とみることができ、分子の次数が分母よりも大きいので、割り算をして分子の次数を下げます。

【解説】

まずは、関数$f(x)$を微分して増減表を書きましょう。

$$f(x) = \frac{1+4x}{1+\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{4\big(1+\sqrt{x}\big) - (1+4x)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\big(1+\sqrt{x}\big)^2}$$

$$= \frac{8\sqrt{x}\big(1+\sqrt{x}\big) - (1+4x)}{2\sqrt{x}\big(1+\sqrt{x}\big)^2} \cdots ①$$

$$= \frac{4x + 8\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}\big(1+\sqrt{x}\big)^2}$$

ここで、$4x + 8\sqrt{x} - 1 = 4\big(\sqrt{x}\big)^2 + 8\sqrt{x} - 1 = 0$を、$x \geqq 0$の範囲で解くと

$$\sqrt{x}=\frac{-4+\sqrt{4^2-4\cdot(-1)}}{4}=\frac{-2+\sqrt{5}}{2}$$

より、

$$x=\left(\frac{-2+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{9-4\sqrt{5}}{4}=\frac{9}{4}-\sqrt{5}$$

増減表より、$x=\dfrac{9}{4}-\sqrt{5}$ のとき最小値をとります。

x	0	$\cdots$	$\frac{9}{4}-\sqrt{5}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	1	↘	最小値	↗

最小値を計算するときに、工夫します。

$$\alpha=\frac{9}{4}-\sqrt{5}$$

とおくと、$f'(\alpha)=0$で①から

$$8\sqrt{\alpha}\left(1+\sqrt{\alpha}\right)-(1+4\alpha)=0\cdots②$$

よって、

$$f(\alpha)=\frac{1+4\alpha}{1+\sqrt{\alpha}}=8\sqrt{\alpha}\ \left(\because ②\right)$$

$$=8\cdot\frac{-2+\sqrt{5}}{2}=4\sqrt{5}-8$$

$\therefore x=\dfrac{9}{4}-\sqrt{5}$のとき、最小値 $4\sqrt{5}-8$

計算のポイント

$f(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}$ とします。

$$f'(x)=\frac{h'(x)g(x)-h(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$f'(\alpha)=0$ のとき、

$$h'(\alpha)g(\alpha)-h(\alpha)g'(\alpha)=0$$

従って、$f(\alpha)=\dfrac{h(\alpha)}{g(\alpha)}=\dfrac{h'(\alpha)}{g'(\alpha)}$

[別解]

$f(x)$が分数関数のように見えますね。例えば、$t=\sqrt{x}$とおくと

$$\frac{1+4x}{1+\sqrt{x}}=\frac{1+4t^2}{1+t}$$

これはt についての分数関数です。そのうえ、分子のほうが分母よりも次数が大き

いので、割り算していく方法が考えられます。ここでは、$t=1+\sqrt{x}$とおくとさらに計算がし易くなります。

$t=1+\sqrt{x}$とおくと$t\geqq 1$、また

$$f(x)=\frac{1+4(t-1)^2}{t}=\frac{4t^2-8t+5}{t}$$

$$=4t-8+\frac{5}{t}=4t+\frac{5}{t}-8$$

$4t>0,\ \dfrac{5}{t}>0$ より、相加平均・相乗平均の関係から、

$$4t+\frac{5}{\mathrm{t}}\geqq 2\sqrt{4t\cdot\frac{5}{t}}=4\sqrt{5}$$

従って、$f(x)\geqq 4\sqrt{5}-8$

等号成立は $4\mathrm{t}=\dfrac{5}{\mathrm{t}}$ のときで、

$$t^2=\frac{5}{4}$$

$$t=\frac{\sqrt{5}}{2}$$ (これは、$t\geqq 1$ を満たす)

相加平均・相乗平均の関係

$a>0, b>0$のとき、

$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$$

等号成立は、$a=b$のとき。

即ち、

$$\sqrt{x}=\frac{\sqrt{5}}{2}-1=\frac{-2+\sqrt{5}}{2}$$

よって、

$$x=\left(\frac{-2+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{9}{4}-\sqrt{5}$$ のとき、最小値 $4\sqrt{5}-8$

(2) (1)より、$x\geqq 0$のとき$f(x)>0$

従って、

$$S=\int_0^1\frac{1+4x}{1+\sqrt{x}}dx$$

$t=1+\sqrt{x}$とおくと、$x=(t-1)^2\quad \dfrac{dx}{dt}=2(t-1)$

x	$0 \to 1$
t	$1 \to 2$

$$S = \int_1^2 \frac{1 + 4(t-1)^2}{t} \cdot 2(t-1)dt$$

$$= 2\int_1^2 \frac{4t^2 - 8t + 5}{t} \cdot (t-1)dt$$

$$= 2\int_1^2 \left(4t^2 - 12t + 13 - \frac{5}{t}\right)dt$$

$$= 2\left[\frac{4t^3}{3} - 6t^2 + 13t - 5\log|t|\right]_1^2$$

$$= 2\left\{\frac{4}{3}(2^3 - 1) - 6(2^2 - 1) + 13(2 - 1) - 5(\log 2 - \log 1)\right\}$$

$$= 2\left(\frac{28}{3} - 18 + 13 - 5\log 2\right)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{13}{3} - 5\log 2\right)$$

$$= \frac{26}{3} - 10\log 2$$