新数学演習

1．数と式、方程式・不等式

1・1

a を様々な値にしたとき、連立方程式がどうなるか考えます。
→連立方程式を解くためには、まず一文字を消去しようと考えます。
→問題文の二式を見ると、y＝…にするよりもx＝…にする方が簡単だと気付くので、これを一方の式に代入してyについての式にします。
（解答のように、はじめの式に a をかけてから整理するのもよいでしょう。）
→整理した式の両辺を見比べて、条件にあった a の値を求めます。

1・2

⑴「$f(a)$＝aを満たす実数aが存在する」とは、「$f(a)$－a＝0を満たす実数aが存在する」ということです。
→aは実数であるということにも注目して、2 次方程式の判別式を考えます。
または、$y = f(a)$と$y = a$の交点を、グラフを見て考えることもできます。
→$y = f(a)$の最小値と$y = a$の関係について調べます。
（どちらのやり方でも難易度は変わりません。）

⑵とりあえず、与えられた2式に値を代入して式を立てると、a と b に対称性があることに気付きます。（2つの式は a と b を入れ替えただけ）
→このときは、2式の和と差を考えることが多いので、今回も同様にします。
→文字 a,b を文字 p,q に変換するために、なんとかして a,b を p,q で表そうとしますが、a＝… ,b＝… とするのは難しそうです。
→a+b＝…, ab＝… の形にして a,b が解になるような2次方程式を作ればよいと考えます。

*⑵のやり方は思いつきにくいですが、この式変形は重要です。

1・3

⑵ ⑴からz＝…を求めて、$|z| < 2$ を証明したいのですが、zの値は a,b を含む複雑な式なので難しそうです。
→ ⑴に$z = \pm 2$ を代入したときの値が、グラフは下に凸であることから考えてどうなっていればよいかを考えます。

⑶$z = x + \frac{1}{x}$ からxについて求めていきます。

→このままだとよくわからないので、xについての2次方程式にしてから考えます。

*ただし、$x = 0$のとき $\frac{1}{x}$ は存在しないので、$z = x + \frac{1}{x}$ の解は$x = 0$を除いた値であることを答案にかけるようにしましょう。

1・4
問題文を見て、具体的に計算するのは無理だとわかります。
→不等式を使って大雑把に計算します。

→$4=2^2$、$\sqrt[3]{3^4}=3^{\frac{4}{3}}$ と変形することに気付けば簡単です。

1・5
(3) (2)を求めるために$\tan 3\alpha$ を使ったので、(3)ではまだ利用していない$\tan 5\alpha$を使うのではないかと予想できます。(←(1)は、(2)(3)を解くために誘導だったのではないか、ということ)
→$24^\circ\times 5<5\alpha<27^\circ\times 5$ を考えることにします。
*どうやって解いたらよいかわからない問題は、前問を利用するのも有効です。

1・6
(2)与式が複雑で、(1)のように簡単には解けません。特に、左辺が見慣れない形になっているので厄介です。
→$\pi\cos x=t$ などとおけば、(左辺)＝$\cos t$ となってみやすくなります。
→現在、t と x の2変数が式にあるので簡単に式が解けなくなっています。したがって、t だけの式を作り出します。($\pi\cos t=\mathrm{t}$)
→ tだけの式も、数式を使って解くのは難しいので、図的に解きます。

1・7
このままでは全く分からないので、なんとかして不等式をよりわかりやすい形にまとめようと考えます。
→sin と cos が2つずつ和の形になっているので、和積の公式を思い出して使います。
→(積の形)≥ 0 だと、どんなときに不等式を満たすのかわかりやすいので、今回もこの形を目指して変形していきます。
*和積・積和の公式は覚えておくと楽ですが、その都度公式を加法定理から導くのも一つの手です。

1・8
まず、左辺を右辺の形にするか、右辺を左辺の形にするか選びますが、左辺のそれぞれの文字を$\tan 10^\circ$ にするほうが簡単なことに気付いて、右辺を左辺の形にしようと決めます。
(大きい角度から小さい角度の式にするほうが簡単なことが多い)…(*)
→加法定理で、それぞれを $\tan 10^\circ$ を使って表せます。

→ $\tan 40^\circ=\tan(20+20)^\circ=\cdots$ などとしてもできますが、$\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$ と数字で表せることに気付けば、$\tan 40^\circ=\tan(30+10)^\circ=\cdots$と計算していったほうがよいことがわかります。ほかも同様です。
→計算していくうちに、$\tan 10^\circ$が何度も出てきて、書くのが面倒になっていくので、この場合は初めに$\tan 10^\circ=t$ などと定数をおいて計算していきます。

1・9

(1)1・8(*)と同様に、右辺・左辺のどちらを片方に変形したほうがいいのか考えて、1・8(*)から左辺を右辺の形にしようと決めます。

→加法定理を使います。

(2)左辺は cos の2次式、右辺は cos の1次式なので、和積または積和の公式を使って次数を揃えます。

→和積の公式を使って右辺から左辺の形を作ろうとすると、どの項で積をつくればよいのか迷うので、今回は積和の公式を使って左辺から右辺の形にします。

→$\cos 4\theta$がでてきて行き詰ったら、まだ使っていない条件$\theta = \frac{\pi}{7}$ を利用しようと考えます。

(3)$f(x) = 0$をそのまま解いて、xの値を求めることは困難です。また、$\cos\frac{\pi}{7}$の値もよくわからないので、具体的に計算することもできません。

→前問を利用して解けるのでは、と考えます。

1・10

(2)そのままM、mを当てはめていく以外の方法が思いつきません。

→地道に当てはめていったとしても、$M - m$となるのは 6 通りだけなので、順番に確かめていけばよいでしょう。6 通り確かめるのが面倒な時は、少し工夫して$|M - m|$を考えればよいでしょう。

(3)M になるのは 3 通りだけなので、そのまま当てはめていってもかまいません。

または、前問の利用です。前問を利用する場合、不等式の立て方に工夫が必要なのでやや難しいでしょう。