

3. 確率

3.1

「同じ地区同士の対戦が含まれない」ということは、かなり限定された組み合わせなので、そのまま考えられるだろうと予想できます。

→余事象を使う必要もないので、樹形図などを使って整理しつつ解いていったほうがよさそうです。

3.2

(1) (2) 3人でジャンケンして1人になるまでには、①3→1 ②3→2→1 の2通りあります。

(3) (ジャンケンが n 回以下で終わる確率) = (1回で終わる) + (2回で終わる) + $\cdots$ + (n 回で終わる)

→すべて求めていくのは大変なので、普通の解き方では解けません。

→余事象「ジャンケンが $(n+1)$ 回以上で終わる確率」=「ジャンケンが n 回でも終わらない確率」(言い換えて、考え方を変えました。)

→① n 回時点で3人残っている ② n 回時点で2人残っている の2通りを考えるだけで済むので簡単になります。

3.3

この問題では、①先生がサイコロのどの目をだすか ②生徒が箱の中から何色の玉を取り出すか という2段階の確率を考える必要があります。

→この2つの確率は、互いに無関係なので、別々に考えることができます。

→(2)では、①先生が2または3の目のサイコロを出す確率 ②生徒が箱の中から赤玉を取り出す確率 を別々に考えられます。

→(3)では、①先生が3回目に4~6の目のサイコロを出す確率 ②生徒が3回目に箱の中から赤玉を取り出す確率 を別々に考えることができます。

3.4

どのようにカードを入れていけばよいのか、まずは考えていきます。 n 回というのが抽象的でよくわからない場合は、 $n = 4, 5$ あたりの数で一度試してみて状況を掴みましょう。

3.5

この問題では、日本がいつ優勝するかについて具体的に指定されているので、問題文の誘導にしたがって解いていけば容易です。

→ n がでてきた際には、(ア)~(エ)を参考にしつつ解いていきましょう。また、(オ)以降で答えが出たときに、 $n = 0, 1$ などを代入して(ア)~(エ)までの答えと照らし合わせることで、解答が正しいかどうかを判断できます。

3.6

(1) (2) 標準レベルの漸化式の問題なのですんなり解けるでしょう。

(3) (2) で立てた漸化式を解いていきますが、3つの式のみを使って解こうとするとうまくいきません。

→ a_n, b_n, c_n を使った式が作れないかと考えます。

→ 全事象の確率を足し合わせたものが1になることは当たり前です。つまり、 $a_n + b_n + c_n = 1$ という式を使おうと考えます。

*元々あった漸化式のみを使って漸化式が解けない場合は、ほかの式を使う必要があるかもしれません。特に、(全事象の確率の和) = 1 は非常に基本的な式ですが、このような場合に利用することがよくあります。

3.7

(2) 漸化式を立てます。漸化式は、どのような状況であるのかが読み取れれば簡単に立てられるので、問題文をしっかり読んで状況を掴みましょう。

(3) $n = 1$ のとき $a_1 = b_1$ であることがわかっており、さらに n という定数でない文字についての証明であることから、数学的帰納法で証明すればよいと考えます。

(4) n がどんな値であるかによって、 p_n が a_n, b_n, c_n のどの2つであるか変わります。しかし、(2) から a_n, b_n, c_n はすべて対称的な式であらわされるので、例えば $p_n = a_n = b_n$ のときの p_n の値だけを求めれば(4)の答えは求まったことになります。

3.8

(1) 「 s_n が4で割り切れる」について考えるので、まずある数が4で割り切れるときの条件について考えます。下2桁の数が4で割り切れればよいことから、今回は $10 \times a_{n-1} + a_n$ が4で割り切れればよいわけです。

→ n 回目と $(n-1)$ 回目のサイコロの目についてのみ考えます。

(2) 解答のような漸化式を立ててもよいですが、別解を示します。

ある数が6で割り切れるときの条件は、その数のそれぞれの位の数の和が3の倍数であり、一の位の数が偶数であるときです。

→ この考え方から漸化式を立てます。

「 s_n が6で割り切れる確率」を t_n とおくと、 $s_{n+1} = s_n \times \frac{1}{6} + (1 - s_n) \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ (s_{n+1} は、 s_n の数字の並びに一の位に数字を足し合わせたものです。) となります。

(3) ある数が7で割り切れるときの条件はよくわからないので、(1) (2) のような考え方では解けません。

→ n という様々に変化する数(定数といえない数)がでてくるときには、漸化式で解けるのではないかと疑ったほうがよいので、ここでも漸化式を使って解こうと考えます。

3.9

(3) $1 - p_{n+1}$ は、試行が $n+2$ 回以降も続いていく場合と、試行が $n+1$ 回目で終わってしまった確率をあわせたもの

なので、 p_{n+2} を漸化式で表すときに $1 - p_{n+1}$ を漸化式に含めることはできません。

(6) q_n は、もちろん(5)で求めたものを使います。

p_{n-1} や p_{n-2} は(4)を見ると、ルートや分数が出てきて複雑です。計算の際にそのまま使うと式もごちゃごちゃするしいちいち書く手間もかかります。

→計算の途中では、 α や β を残した式を使えばすっきりと計算しやすくなります。このように計算の表記の工夫をするのも数学では重要です。

3. 10

(3) 求めるべき式をみると、 P_n と P_{n+1} がでてくるので、まずは P_n を求めようと考えます。

→しかし、 $P_n = (\text{表が } n+1 \text{ 回でる確率}) + (\text{表が } n+2 \text{ 回でる確率}) + \dots + (\text{表が } 2n \text{ 回でる確率})$ なので、求めるのが大変です。

→求めるべき式は、 $P_{n+1} - P_n = \dots$ となっているので、漸化式を立てればよいのではないかと考えます。

→漸化式を立てます。

→ $P_{n+1} - P_n = \dots$ となったあとの右辺の整理は、最終的な形が $p^{n+1}(1-p)^n(ap+b)$ となることを頭にいれて行えば、それほど難しくはありません。

3. 11

まず、問題の意味を捉える必要があります。 $Y_k = X_k + \frac{1}{Y_{k-1}}$ を見ると、この中ではっきりと数を決めることができるのは、 X_k だけです。(自然数 1~6 のどれか)

→ $X_k \geq 1$ より、 $Y_k = X_k + \frac{1}{Y_{k-1}} \geq 1 + \frac{1}{Y_{k-1}} > 1$ なので、 $\frac{1}{Y_k} < 1$, つまり、 $\frac{1}{Y_{k-1}} < 1$ です。

→これより、 $\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leq Y_n \leq 1 + \sqrt{3}$ となるのは、 $X_k = 1, 2$ の2通りに絞られることがわかります。

*このあとの手順は難しいですが、ここまでの過程(それぞれの文字がとる範囲を出すことと、 X_k の値を出すこと)はできてほしいです。

→ Y_n の範囲と X_k の値が分かっているので、 Y_{n-1} の範囲を出せます。

→それぞれの範囲から漸化式を立てるのですが、この式の立て方はやや難しいです。解答を見て、何をしているのか理解できれば十分でしょう。

3. 12

$A_n = \frac{\square}{\square}A_{n+1} + \frac{\square}{\square}A_{n-1}$ の係数に注意しましょう。

→ A_n とは、太郎君の所持金が n 円となった時から「スタート」です。 A_{n+1} は、太郎君の所持金が n 円の時、一度太郎君がじゃんけんで勝ったときから「スタート」する確率なので、係数は $\frac{2}{5}$ です。 A_{n-1} のときも同様の考え方です。

*仮に、この係数を逆にしてしまった場合、花子さんが勝つ確率よりも太郎君が勝つ確率のほうが高くなります。

しかし、初めに「太郎君が2円、花子さんが3円持っている」ことと、「太郎君がじゃんけんに勝つ確率が $\frac{2}{5}$ 、負ける確率が $\frac{3}{5}$ 」であることから、矛盾に気づくはずです。

答えが予想と明らかに違う場合は、計算の仕方が間違っている、ということを疑って、できるだけミスを減らしましょう。

3. 13

p_n は、きわめて基本的な確率です。

その後、 Σ をとって区分求積法(数3の積分の範囲にて習います。) を使えるかが大きなポイントになります。

Σ の外に $\frac{1}{n}$ を出せることと、 Σ の中に $\frac{k}{n}$ が含まれていることから、区分求積法を使えばこの問題は解けるのでは、と予想してほしいです。

3. 14

立方体の頂点の中から適当にAを定めると、B,Cの頂点の選び方は、 $7 \times 6 = 42$ 通りなので、地道に考えて行ってもそれほど大変でないことがわかります。立方体の対称性も使えばより簡単になるので、そのまま地道に考えるやり方でやるのが無難でしょう。

また、立方体の頂点はもともと区別がついていませんが、確率の問題ではミスを避けるために、区別されていないものでもできるだけ区別して考えるようにしましょう。

3. 15

問題文より、「～2個とも赤玉であった。このとき選ばなかった箱がAである確率を求めよ。」とあります。

→これは条件付き確率で、「箱から引いた玉が赤玉だった」という条件のもとで、「赤玉を引いた箱がBとCであった」確率を求めるものです。

→条件付き確率の公式に当てはめて解くだけです。

3. 16

(1) $K_2, K_3 \dots$ とひとつひとつ考えていくことはできないので、 K_i ($i = 2, 3, \dots, n$)を箱にいれるときについて、一般的に考えていきます。

→このとき、箱 H_i が空いているときと空いていないときで場合分けして考えていけば、 K_n を箱にいれるとき、どの箱が空いているのか見えてきます。

(2) n 個の球と箱では、少し抽象的で状況を捉えづらいので、小さな値($n = 3, 4$ あたり)で試してみます。

→すると、 n がどんな値の時でも、求める確率が同じになることに気づきます。

→ n が大きくなってもこの確率は一定なのではないか、数学的帰納法で示せば簡単にできそうだと考えます。

*解答 p. 32 の上から11行目「～、これは、 $n = m + 1 - (j - 1)$ の場合と同じである」とありますが、このように添え字を工夫することで簡単に解ける問題は数多くあります。ぜひ身につけましょう。