日本大学入試問題

2015年数学

解答・解説編

①小問集合

○原則

(1) ◆分母の有理化

$a>0,\ b>0,\ a\neq b$ とします。

$$\frac{A}{\sqrt{a}}=\frac{A\sqrt{a}}{a},\qquad \frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{A(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b},\qquad \frac{A}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$$

(2) ◆正弦定理

△ABC において次のことが成り立ちます。ただし、R は△ABC の外接円の半径です。

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

◆余弦定理

△ABC において、次のことが成り立ちます。

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

(3) ◆二次方程式の解の配置

2 次方程式 $f(x)=ax^2+bx+c=0$ があるとき

Ｉ）α より大きい相異なる 2 つの実数解を持つ条件は

①判別式 $D>0$

②放物線 $y=f(x)$ の軸が

$$\alpha<x=-\frac{b}{2a}$$

③$f(\alpha)>0$

Ⅱ）α より小さい相異なる 2 つの実数解を持つ条件は

①判別式 $D>0$

②放物線 $y=f(x)$ の軸が

$$\alpha>x=-\frac{b}{2a}$$

③$f(\alpha)>0$

(4) ◆定積分

関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とするとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

○解答・解説

(1)

【方針】

一度で有理化できないので、2 回に分けて行います。最初に、分母分子に $\left(2+\sqrt{3}\right)-\sqrt{7}$ を掛けます。次に、$\sqrt{3}$ を分母分子にかけます。

【解説】

分母分子に$\left(2+\sqrt{3}\right)-\sqrt{7}$を掛けます。

$$\frac{12}{2+\sqrt{3}+\sqrt{7}} = \frac{12}{\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)+\sqrt{7}\right\}} \cdot \frac{\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)-\sqrt{7}\right\}}{\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)-\sqrt{7}\right\}}$$

$$= \frac{12\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)-\sqrt{7}\right\}}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2} = \frac{12\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)-\sqrt{7}\right\}}{4\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)-\sqrt{7}\right\}}{\sqrt{3}} = \frac{3\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)-\sqrt{7}\right\}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt{3} - \sqrt{7}\sqrt{3}$$

$$= \underline{2\sqrt{3}+3-\sqrt{21}}$$

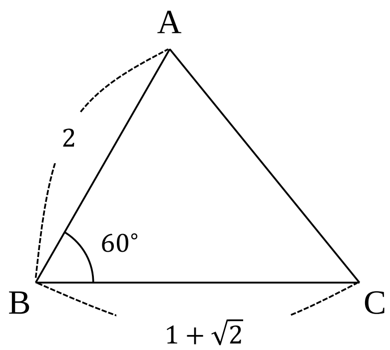
※この問題では、$\dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ のように「約分」してもいいです。

(2)

【方針】

△ABC の外接円の半径を求めるのに、正弦定理を利用します。そのためには辺 AC の長さが必要となりますが、それは余弦定理を使って求めます。

【解説】



△ABC で余弦定理から

$$\mathrm{AC}^2 = 2^2 + \left(1+\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot 2\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)\cos 60^\circ$$

$$= 4 + 3 + 2\sqrt{2} - 2\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$= 5$$

$AC > 0$ より、$AC = \sqrt{5}$

次に、△ABC の外接円の半径を R とおくと、正弦定理から

$$\frac{\sqrt{5}}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$R = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5} \cdot 2}{\sqrt{3}} = \underline{\frac{1}{3}\sqrt{15}}$$

(3)

【方針】

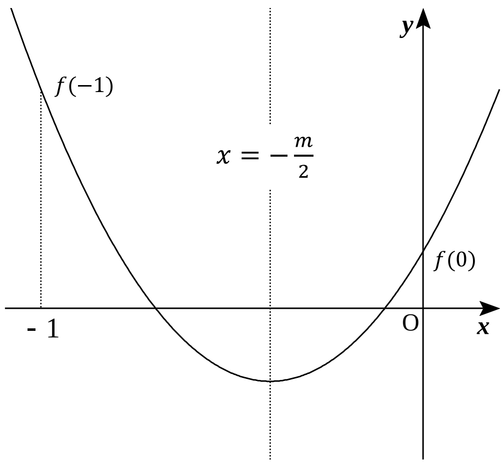
グラフを使って考えます。題意を満たすには、放物線 $y = x^2 + mx - 2m + 4$ のグラフが x 軸の $-1 < x < 0$ の部分で、相異なる 2 点で交わることになります。そうなるには、① 判別式 > 0, ② $-1 <$ 軸 < 0, ③ $f(-1)$, ④ $f(0) > 0$ のすべて満たす必要があります。

【解説】

$f(x) = x^2 + mx - 2m + 4$ とおきます。

$$f(x) = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4} - 2m + 4$$

2 次方程式 $x^2 + mx - 2m + 4 = 0$ が $-1 < x < 0$ の範囲で異なる 2 つの実数解を持つには、次の 4 つが成り立てばよい。



①$f(x) = 0$ の判別式 $D > 0$

②軸 $x = -\dfrac{m}{2}$ が -1 と 0 の間にある。つまり、$-1 < -\dfrac{m}{2} < 0$

③$f(-1) > 0$

④$f(0) > 0$

①より

$$D = m^2 - 4(-2m + 4) > 0$$

$$m^2 + 8m - 16 > 0$$

$$m < -4 - 4\sqrt{2}, \qquad m > -4 + 4\sqrt{2}$$

②より $0 < m < 2$

③より

$$f(-1) = (-1)^2 + m(-1) - 2m + 4 = -3m + 5 > 0$$

$$m < \frac{5}{3}$$

④より

$$f(0) = -2m + 4 > 0$$

$$m < 2$$

ここで、$\frac{5}{3}$と$-4 + 4\sqrt{2}$の大小関係を調べます。

$$\frac{5}{3} = -4 + \frac{17}{3} = -4 + \frac{\sqrt{17^2}}{3} = -4 + \frac{\sqrt{289}}{3}$$

$$-4 + 4\sqrt{2} = -4 + \frac{12\sqrt{2}}{3} = -4 + \frac{\sqrt{288}}{3}$$

よって

$$-4 + 4\sqrt{2} < \frac{5}{3}$$

以上から

$$\underline{-4 + 4\sqrt{2} < m < \frac{5}{3}}$$

[別解]

【方針】

方程式の問題は、グラフの視点から解くことができます。$x^2 + mx - 2m + 4 = 0$ の解は、放物線 $y = x^2 + 4$ と直線 $y = -m(x - 2)$ との共有点の x 座標と考えることができます。$-1 < x < 0$ の範囲に異なる 2 つの実数解を持つということは、$-1 < x < 0$ の範囲に相異なる 2 つの共有点を持つということです。

【解説】

2 次方程式 $x^2 + mx - 2m + 4 = 0 \cdots$ ① の解は

$$① \iff x^2 + 4 = -m(x - 2)$$

より、放物線C： $y = x^2 + 4$ と直線l：$y = -m(x - 2)$ との共有点における x 座標です。それぞれのグラフは図のようになり、それらが $-1 < x < 0$ の範囲に異なる 2 つの共有点を持つときに、題意を満たします。

そのような直線 l は、点$(-1,\ 5)$ を通るときの直線と、放物線 C と接するときとの直線との間にあるときです。

直線 l が点$(-1,\ 5)$ を通るとき

$$5 = -m(-1 - 2) \text{ より、} m = \frac{5}{3}$$

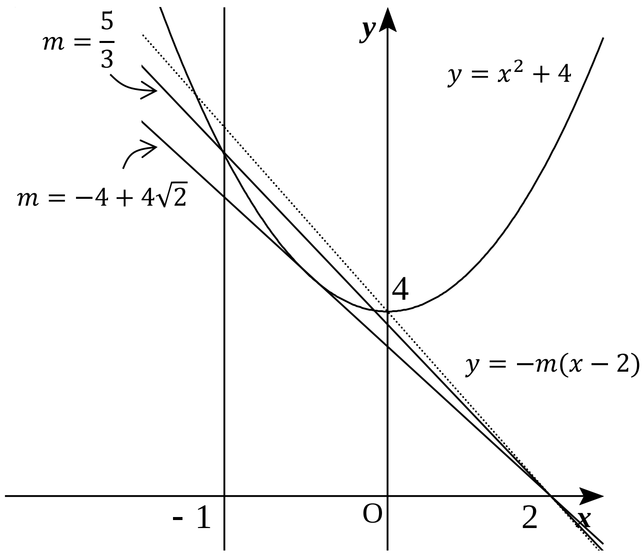
直線 l が放物線 C と接するのは①の判別式 D が、$D=0$ を満たすときです。

従って

$$D=m^2-4(-2m+4)=0$$
$$m^2+8m-16=0$$
$$m=-4\pm\sqrt{4^2-(-16)}$$
$$=-4\pm4\sqrt{2}$$

第 2 象限で接するのは、
$m=-4+4\sqrt{2}$ のときです。
よって

$$\underline{-4+4\sqrt{2}<m<\frac{5}{3}}$$



(4)

【方針】

定積分を計算すると、a についての 2 次式となります。これを 2 次関数とみて、最大値を求めます。それには、平方完成します。また、a は実数全体をとること、この放物線は上に凸となることより、頂点で最大値をとることが分かります。

【解説】

与えられた定積分を $f(a)$ とします。

$$f(a)=\int_0^1(ax^2+x-a^2)dx$$
$$=\left[\frac{ax^3}{3}+\frac{x^2}{2}-a^2x\right]_0^1=\frac{a}{3}+\frac{1}{2}-a^2$$
$$=-\left(a^2-\frac{a}{3}\right)+\frac{1}{2}$$
$$=-\left\{\left(a-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{36}\right\}+\frac{1}{2}$$
$$=-\left(a-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{19}{36}$$

よって、

$a=\frac{1}{6}$ のとき、最大値 $\underline{\frac{19}{36}}$ をとります。

②小問集合

○原則

(1) ◆対数関数　$y = \log_a x$ (底の条件 $a > 0, a \neq 1$　真数条件 $x > 0$)

ⅰ) $a > 1$ のとき　　$p < q \Leftrightarrow \log_a p < \log_a q$　増加関数

ⅱ) $0 < a < 1$ のとき　$p < q \Leftrightarrow \log_a p > \log_a q$　減少関数

(2) ◆円と直線が接する条件

円C : $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$ と直線 m : $ax + by + c = 0$ が接する条件は次の 2 つが考えられます。

Ⅰ）円C の中心 (x_1, y_1) と直線 m との距離 d が、円C の半径 r と等しくなる。すなわち

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = r$$

Ⅱ）円C の方程式と直線 m の方程式を連立して得られる x についての 2 次方程式(もしくは、y についての 2 次方程式)の判別式を D としたとき

$$D = 0$$

(3) ◆数列 $\{a_n\}$ の単調増加・単調減少

数列 $\{a_n\}$ について

$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \cdots$　を満たしているとき、数列 $\{a_n\}$ は単調増加する

$a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \cdots$　を満たしているとき、数列 $\{a_n\}$ は単調減少する

といいます。

数列 $\{a_n\}$ が単調増加か単調減少かを調べるには、次の 2 通りあります。

Ⅰ）$a_{n+1} - a_n \geqq 0 \Leftrightarrow$ 単調増加

$a_{n+1} - a_n \leqq 0 \Leftrightarrow$ 単調減少

Ⅱ）$a_n \neq 0$ のとき

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqq 1 \Leftrightarrow$ 単調増加

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq 1 \Leftrightarrow$ 単調減少

(4) ◆重複組み合わせ

異なる n 個のものから重複を許して r 個取る組み合わせの総数${}_nH_r$ は

$${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$$

○解答・解説

(1)

【方針】

対数不等式を解くときに注意することが 2 つあります。1 つは真数条件、もう 1 つは底の値です。この問題では底を 3 に揃えて不等式を解きますが、1 より大きい底となるので、この対数関数は増加関数です。原則に従って、不等式を解きます。

【解説】

真数条件より

$$2x+3>0\cdots①,\ 5x^2+5x+15>0\cdots②$$

①より、

$$x>-\frac{3}{2}\cdots①'$$

②の両辺を 5 で割って

$$x^2+x+3>0$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}>0$$

なので、②はすべての実数 x で成立します。従って、真数条件から①$'$が得られます。

次に、与えられた不等式の底を 3 に揃えると

$$\log_3(2x+3)>\frac{\log_3(5x^2+5x+15)}{\log_3 9}$$

$$\log_3(2x+3)>\frac{1}{2}\log_3(5x^2+5x+15)$$

$$2\log_3(2x+3)>\log_3(5x^2+5x+15)$$

$$\log_3(2x+3)^2>\log_3(5x^2+5x+15)$$

底の変換公式

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

底が 3 で 1 より大きいので

$$(2x+3)^2>5x^2+5x+15$$

$$x^2-7x+6<0$$

$$(x-6)(x-1)<0$$

$$1<x<6\cdots②$$

①$'$②より、$\underline{1<x<6}$

(2)

【方針】

与えられた曲線が円であることは、すぐに分かります。そこで、円と直線が接する条件を考えます。判別式が 0 となる方法は、計算が煩雑になりそうなので、円の中心と直線との距離が、円の半径に等しくなることを使います。

【解説】

与えられた曲線の方程式を変形します。

$$x^2 + y^2 - 12x - 2y + 33 = 0$$
$$(x-6)^2 + (y-1)^2 = 4$$

従って、曲線は、中心$(6,\ 1)$, 半径 2 の円です。

この円が、直線 $y = \dfrac{1}{6}x + k \Leftrightarrow x - 6y + 6k = 0$ と接するので

円の中心$(6,\ 1)$ と直線との距離が、円の半径 2 と等しくなります。

すなわち

$$\frac{|1 \cdot 6 - 6 \cdot 1 + 6k|}{\sqrt{1^2 + (-6)^2}} = 2$$
$$|6k| = 2\sqrt{37}$$
$$|k| = \frac{\sqrt{37}}{3}$$

$k > 0$ より、$\underline{k = \dfrac{\sqrt{37}}{3}}$

(3)

【方針】

数列$\{a_n\}$ が単調増加しているのか単調減少しているのかを調べるために、$a_{n+1} - a_n$ の正負を調べます。$a_{n+1} - a_n > 0$ であれば単調増加、$a_{n+1} - a_n < 0$ であれば単調減少です。

【解説】

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2^{n+1}}\{(n+1)^2 - 23(n+1) - 48\} - \frac{1}{2^n}(n^2 - 23n - 48)$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}}(n^2 - 21n - 70) - \frac{1}{2^{n+1}}(2n^2 - 46n - 96)$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}}(-n^2 + 25n + 26)$$

$$= -\frac{1}{2^{n+1}}(n-26)(n+1)$$

従って

$1 \leqq n \leqq 25$ のとき、$a_{n+1} - a_n > 0$

$n = 26$ のとき、$a_{n+1} - a_n = 0$

$27 \leqq n$ のとき、$a_{n+1} - a_n < 0$

つまり

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{25} < a_{26} = a_{27} > a_{28} > a_{29} > \cdots$$

数列$\{a_n\}$は$n = 26,\ 27$ のとき最大値をとり、最大の n は、$\underline{n = 27}$ です。

(4)

【方針】

題意を満たす 4 桁の整数を作るには、次のように考えます。4 個の数を選んだあとに、それらを小さい順に並べます。小さい数から順に、x, y, z, w を対応させれば題意を満たす整数となります。この小さい順に並べる並べ方は 1 通りなので、結局、5 種類の数字から重複を許して 4 個の数字を選ぶ選び方が､求めたい場合の数になります。

【解説】

5 種類の数字から、重複を許して 4 個の数字を選ぶ選び方は

$${}_5H_4 = {}_8C_4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$$

選んだ数字を、小さい順に並べて小さいほうの数字から、$x,\ y,\ z,\ w$ と決めます。この決め方は 1 通りです。

従って、求める場合の数は 70 通りです。

-----参考--

[重複組み合わせの考え方]

図のように、縦棒 4 本で 5 つのエリアに分けます。左側のエリアから 1,2,3,4,5 と数字を割り当てます。各エリアにある○記号の数で、そのエリアの数字が選ばれた数を表すことにします。○記号がないエリアは、そのエリアの数字が選ばれていないことを意味します。

（例）図 1　{1,2,4,4}　図 2　{1,1,1,1}　図 3　{2,3,4,5}

[図 1]

1　2　3　4　5

○ | ○ | | ○○ |

[図 2]

1　2　3　4　5

○○○○ | | | |

[図 3]

1　2　3　4　5

| ○ | ○ | ○ | ○

このようにして考えると、5 種類の数字から重複を許して 4 個の数字を選ぶ選び方は、○記号 4 個、縦棒 4 本を一列に並べた時の並べ方と等しくなります。そして、その並べ方は

$$\frac{8!}{4!\,4!} = {}_8C_4 \quad \text{（通り）}$$

となります。

③空間ベクトル

○原則

(1) ◆三角形の面積

△ABC において、∠A $=\theta$ とします。△ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\sin\theta$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}$$

(2) ◆内分点・外分点を表すベクトル

△OAB で線分 AB を $m:n$ に内分する点を P、線分 AB を $m:n$ に外分する点を Q とします。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{-n\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m-n}$$

◆2 つのベクトルの直交条件

$$\vec{a} \perp \vec{b}\ \left(\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}\right) \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

(3) ◆四面体の体積

四面体の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$$

◆直線と平面の直交条件

直線 l と平面 ABC があるとき

「$l \perp$ 平面 ABC」 $\Leftrightarrow$ 「$l \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$」 かつ「$l \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$」

◆平面上の点

一直線上にない 3 点 A、B、C と点 P について

Ⅰ）点 P が平面 ABC 上にある $\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ $(s, t$は実数$)$

Ⅱ）点 P が平面 ABC 上にある $\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$(s + t + u = 1, s, t, u$ は実数$)$

○解答・解説

(1)

【方針】

原則を使って、三角形の面積を計算します。それには $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$, $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の値が必要です。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{c} - \vec{a}$ として、それらを計算します。

【解説】

△ABC の面積をS とすると

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2} \cdots ①$$

です。

ここで、$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$, $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めていきます。

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 = \left|\vec{b} - \vec{a}\right|^2 \\ &= \left|\vec{b}\right|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 \\ &= 4^2 - 2 \cdot 4 + 3^2 = 17\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 = |\vec{c} - \vec{a}|^2 \\ &= |\vec{c}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2 \\ &= 3^2 - 2 \cdot 5 + 3^2 = 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \left(\vec{b} - \vec{a}\right) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) \\ &= \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{a}|^2 \\ &= 4 - 4 - 5 + 3^2 = 4\end{aligned}$$

これらを①に代入して

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{17\cdot 8-4^2}=\underline{\sqrt{30}}$$

(2)

【方針】

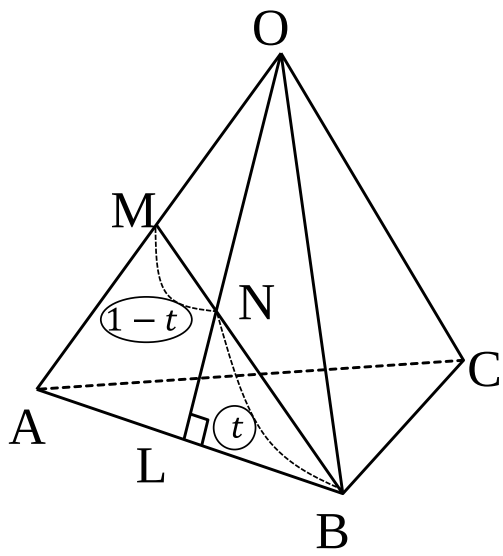
点 N は線分 BM の内分点なので、BN : NM $= t : (1-t)$ とおけます。あとは、t についての方程式を立てて、t の値を求めます。それには、点 N が垂線 OL 上の点であることから、$\overrightarrow{\mathrm{ON}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となり $\overrightarrow{\mathrm{ON}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ を利用します。

【解説】

点 N は線分 BM の内分点なので、BN : NM $= t : (1-t)$ とおきます。

このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=t\overrightarrow{\mathrm{OM}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=\frac{t}{2}\vec{a}+(1-t)\vec{b}\cdots②$$



次に、OL は辺 AB の垂線なので $\overrightarrow{\mathrm{ON}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$、

従って $\overrightarrow{\mathrm{ON}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left\{\frac{t}{2}\vec{a}+(1-t)\vec{b}\right\}\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=0$$

$$(1-t)\left|\vec{b}\right|^2-\frac{t}{2}|\vec{a}|^2+\left\{\frac{t}{2}-(1-t)\right\}\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$(1-t)\cdot 4^2-\frac{t}{2}\cdot 3^2+\left(\frac{3t}{2}-1\right)\cdot 4=0$$

$$-29t+24=0$$

$$t=\frac{24}{29}$$

②に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{24}{29}\cdot\frac{1}{2}\vec{a}+\left(1-\frac{24}{29}\right)\vec{b}$$
$$=\frac{12}{29}\vec{a}+\frac{5}{29}\vec{b}=\underline{\frac{1}{29}\left(12\vec{a}+5\vec{b}\right)}$$

(3)

【方針】

四面体の体積を求めるには、原則のとおり底面積と高さの値が必要です。底面積については、(1)で計算してあります。高さは垂線 OH の長さなので、$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を求めればよいことになります。それには、点 H が平面 ABC 上にあること、$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp$ 平面 ABC より $\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であることを利用します。

【解説】

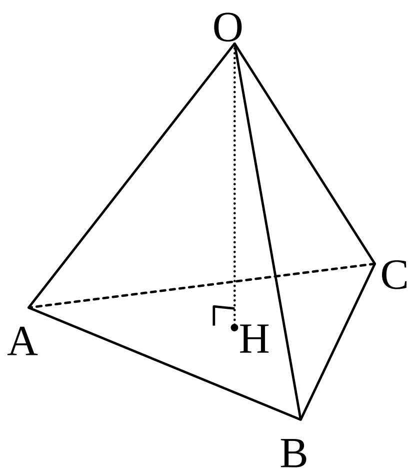
点 H は平面 ABC 上の点なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\ \ (s, t \text{ は実数})$$

とおけます。

また、$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp$ 平面 ABC なので $\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ 即ち

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$$



これらの内積を計算すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} - \vec{a}\right) + 17s + 4t = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{a}|^2 + 17s + 4t = 0$$

$$17s + 4t = 5 \cdots ③$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} + t\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 = 0$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) + 4s + 8t = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} - |\vec{a}|^2 + 4s + 8t = 0$$

$$4s + 8t = 4$$

$$s + 2t = 1 \cdots ④$$

③④より

$$15s = 3, \quad \therefore s = \frac{1}{5}, \qquad t = \frac{2}{5}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$= \vec{a} + \frac{1}{5}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) + \frac{2}{5}(\vec{c} - \vec{a})$$

$$= \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c} = \frac{1}{5}\left(2\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}\right)$$

次に

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|^2=\left|\frac{1}{5}\left(2\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}\right)\right|^2$$

$$=\frac{1}{25}\left(4|\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2+4|\vec{c}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}\cdot\vec{c}+8\vec{c}\cdot\vec{a}\right)$$

$$=\frac{1}{25}(4\cdot 3^2+4^2+4\cdot 3^2+4\cdot 4+4\cdot 4+8\cdot 5)$$

$$=\frac{1}{25}\cdot 160$$

より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|=\frac{4\sqrt{10}}{5}$$

四面体 OABC の体積V は

$$V=\frac{1}{3}\cdot(\triangle\,\mathrm{ABC})\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{30}\cdot\frac{4\sqrt{10}}{5}=\underline{\frac{8}{3}\sqrt{3}}$$

-----参考--

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を次のように設定することもできます。

点 H は平面 ABC 上の点なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ \left(s+t+u=1\cdots⑤,\ s,t,u\text{ は実数}\right)$$

$$=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=0$ より

$$s\vec{a}\cdot\vec{b}-s|\vec{a}|^2+t\left|\vec{b}\right|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}+u\vec{b}\cdot\vec{c}-u\vec{a}\cdot\vec{c}=0$$

$$-5s+12t-u=0\cdots⑥$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}\right)\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$ より

$$s\vec{a}\cdot\vec{c}-s|\vec{a}|^2+t\vec{b}\cdot\vec{c}-t\vec{a}\cdot\vec{b}+u|\vec{c}|^2-u\vec{a}\cdot\vec{c}=0$$

$$-4s+4u=0\cdots⑦$$

⑤⑥⑦より

$$s=\frac{2}{5},\ t=\frac{1}{5},\ u=\frac{2}{5}$$ を得ます。

④微分積分

○原則

(1) ◆関数 $y=f(x)$ の増減

Ⅰ) ある区間で常に、$f'(x)>0 \Longrightarrow$ その区間で$f(x)$は単調増加。

Ⅱ) ある区間で常に、$f'(x)<0 \Longrightarrow$ その区間で$f(x)$は単調減少。

Ⅲ) ある区間で常に、$f'(x)=0 \Longrightarrow$ その区間で$f(x)$は定数。

◆関数$y=f(x)$の極大・極小

極大：$x=a$で、$f'(x)$の値が正から負に変化するとき、$x=a$で極大、$f(a)$を極大値といいます。

極小：$x=a$で、$f'(x)$の値が負から正に変化するとき、$x=a$で極小、$f(a)$を極小値といいます。

(2) ◆置換積分

方法Ⅰ) $x=g(t)$ とおく。

$$\int f(x)dx=\int f(x)\frac{dx}{dt}dt=\int f\bigl(g(t)\bigr)g'(t)dt$$

方法Ⅱ) $g(x)=t$ とおく。

$$\int f\bigl(g(x)\bigr)g'(x)dx=\int f(t)\frac{dt}{dx}dx=\int f(t)dt$$

○解答・解説

(1)

【方針】

増減表を書くには、まず関数 $y=x+\sqrt{4-(x-1)^2}$ を微分します。そして、導関数 y' の正負を調べます。

【解説】

$$y=x+\sqrt{4-(x-1)^2}$$

$$y'=1+\{4-(x-1)^2\}'\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}}$$

$$=1+\frac{-2(x-1)}{2\sqrt{4-(x-1)^2}}=1-\frac{x-1}{\sqrt{4-(x-1)^2}}$$

合成関数の微分

$y=f(g(x))$のとき

$y'=f'(g(x))g'(x)$

$$= \frac{\sqrt{4-(x-1)^2}-(x-1)}{\sqrt{4-(x-1)^2}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{4-(x-1)^2}-(x-1)\right)\left(\sqrt{4-(x-1)^2}+(x-1)\right)}{\sqrt{4-(x-1)^2}\cdot\left(\sqrt{4-(x-1)^2}+(x-1)\right)}$$

$$= \frac{4-(x-1)^2-(x-1)^2}{\sqrt{4-(x-1)^2}\cdot\left(\sqrt{4-(x-1)^2}+(x-1)\right)}$$

$$= \frac{2\{2-(x-1)^2\}}{\sqrt{4-(x-1)^2}\cdot\left(\sqrt{4-(x-1)^2}+(x-1)\right)}$$

$$= \frac{2\left(\sqrt{2}+x-1\right)\{\sqrt{2}-(x-1)\}}{\sqrt{4-(x-1)^2}\cdot\left(\sqrt{4-(x-1)^2}+(x-1)\right)}$$

$$= \frac{-2\left(x-1+\sqrt{2}\right)\left(x-1-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{4-(x-1)^2}\cdot\left(\sqrt{4-(x-1)^2}+(x-1)\right)}$$

また

$$y'' = \left\{1-\frac{x-1}{\sqrt{4-(x-1)^2}}\right\}'$$

$$= -\frac{\sqrt{4-(x-1)^2}-(x-1)\left\{-\frac{2(x-1)}{\sqrt{4-(x-1)^2}}\right\}}{4-(x-1)^2}$$

$$= -\frac{4-(x-1)^2+2(x-1)^2}{\{4-(x-1)^2\}\sqrt{4-(x-1)^2}}$$

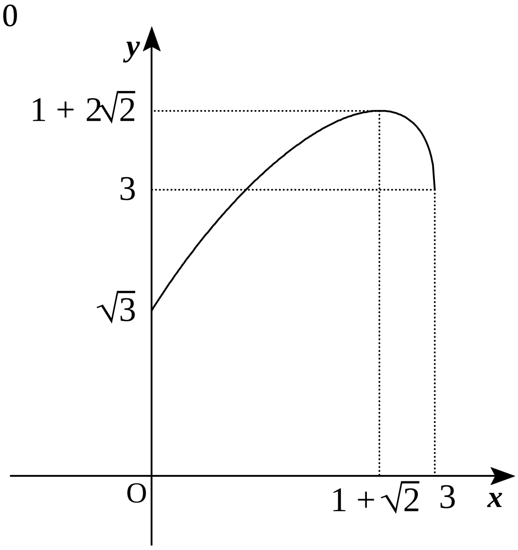
$$= -\frac{4+(x-1)^2}{\{4-(x-1)^2\}\sqrt{4-(x-1)^2}} < 0$$

$y'' < 0$ より、この関数は上に凸となります。
また、$x = 1+\sqrt{2}$ のときの y の値は

$$y = 1+\sqrt{2}+\sqrt{4-\left(1+\sqrt{2}-1\right)^2}$$

$$= 1+2\sqrt{2}$$

以上より、増減表とグラフの概形は次のようになります。



x	0	$\cdots$	$1+\sqrt{2}$	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	
y	$\sqrt{3}$	↗	$1+2\sqrt{2}$	↘	3

(2)

【方針】

(1)より、どの図形の面積を計算するのかが確認でき、定積分により計算します。$\sqrt{4-(x-1)^2}$ のように円の一部分を定積分するときは、図を利用すると計算が軽減できます。

【解説】

求める図形の面積 S は

$$S=\int_0^3\left(x+\sqrt{4-(x-1)^2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3+\int_0^3\sqrt{4-(x-1)^2}\,dx$$

$$=\frac{9}{2}+\int_0^3\sqrt{4-(x-1)^2}\,dx$$

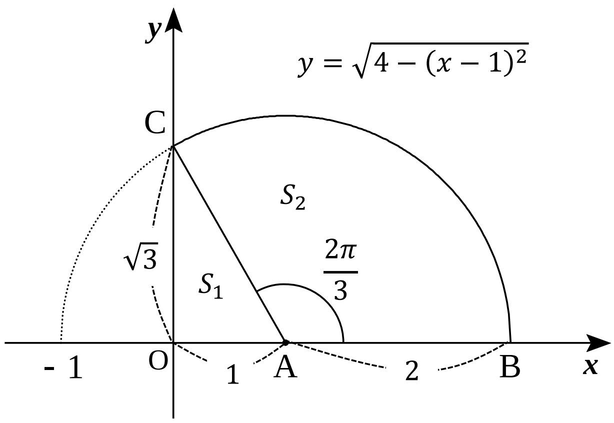
ここで

$I=\int_0^3\sqrt{4-(x-1)^2}\,dx$ とします。

$y=\sqrt{4-(x-1)^2}$ は、中心 $(1,\ 0)$ 半径 2 の円の x 軸より上側にある半円を表すことから、 △AOB の面積 S_1 、おうぎ型 ABC の面積 S_2 とおくと

$$I=S_1+S_2$$

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



また、△AOC でOA : AC : OC = 1 : 2 : $\sqrt{3}$ なので

$\angle\mathrm{OAC}=\frac{\pi}{3}$ よって、$\angle\mathrm{BAC}=\frac{2\pi}{3}$

おうぎ型 ABC は、中心角が $\frac{2\pi}{3}$、半径 2 なのでその面積は

$$S_2 = \frac{1}{2}2^2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

よって

$$I = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4\pi}{3}$$

求める面積は

$$S = \frac{9}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4\pi}{3} = \underline{\frac{9+\sqrt{3}}{2} + \frac{4\pi}{3}}$$

おうぎ型の面積

半径 r 、中心角 θ のおうぎ型の面積 S

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta$$

-----参考-----

$I = \int_0^3 \sqrt{4-(x-1)^2}\,dx$は、置換積分でも計算できます。

$x - 1 = 2\sin\theta$ とおきます。$dx = 2\cos\theta\,d\theta$

x	0	$\to$	3
θ	$-\frac{\pi}{6}$	$\to$	$\frac{\pi}{2}$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-(2\sin\theta)^2}\,2\cos\theta\,d\theta$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\,2\cos\theta\,d\theta$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cdot 2\cos\theta\,d\theta = 4\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta$$

$$= 4\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta = 2\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\left\{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\} = \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

⑤微分

○原則

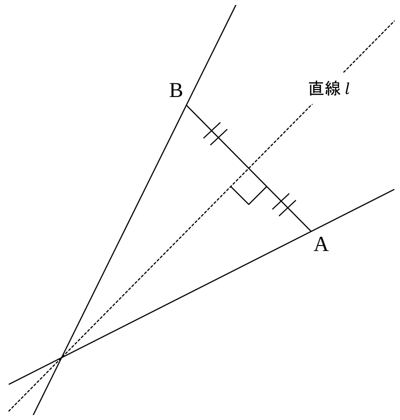
(1) ◆法線の方程式

関数$y = f(x)$上の点$(a, f(a))$ における法線の方程式は、

$$y = -\frac{1}{f'(a)}(x-a) + f(a)$$

◆対称移動

点 A を直線 l について対称移動した後の点を B とすると、直線 l は線分 AB の垂直 2 等分線になります。



(2) ◆線形計画法

点 $(x,\ y)$ が領域 D 内の点であるとき、$ax+by$ の取り得る範囲を求めるには、直線 $ax+by=k$ と y 軸との交点に着目して、グラフから読み取ります。

○解答・解説

(1)

【方針】

まず、点 $\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$ における法線の方程式を求めます。

次に原則に従って、求めた法線と線対称な位置にある直線の方程式を求めます。

【解説】

法線 n の方程式を求めます。

$$y=\frac{1}{x} \text{ より } \quad y'=-\frac{1}{x^2}$$

よって法線 n は

$$y=-\frac{1}{-\frac{1}{a^2}}(x-a)+\frac{1}{a}=a^2x-a^3+\frac{1}{a}\cdots①$$

法線 n 上の点$(x,\ y)$を直線 $x=a$ に関して対称移動した後の点を(X, Y) とおくと、

$$\begin{cases}\dfrac{x+X}{2}=a\\ y=Y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-X+2a\\ y=Y\end{cases}$$

点$(x,\ y)$ は法線 n 上なので

$$Y=a^2(-X+2a)-a^3+\frac{1}{a}=-a^2X+a^3+\frac{1}{a}$$

よって

$$y=f(x)=\underline{-a^2x+a^3+\frac{1}{a}}$$

次に、$y=f(x)$ と$y=\dfrac{1}{x}$ との交点の座標を求めます。そのために 2 つの式を連立します。

$$-a^2x+a^3+\frac{1}{a}=\frac{1}{x}$$

$$-a^2x^2+\left(a^3+\frac{1}{a}\right)x=1$$

$$x^2-\left(a+\frac{1}{a^3}\right)x+\frac{1}{a^2}=0$$

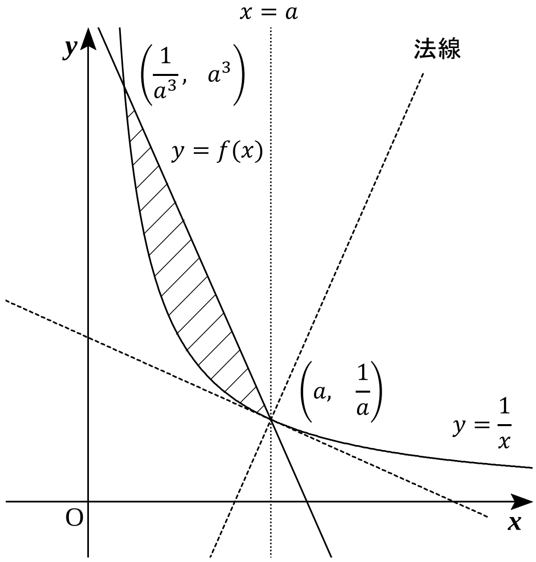
$$(x-a)\left(x-\frac{1}{a^3}\right)=0$$

$$x=a,\ \frac{1}{a^3}$$

よって、交点の座標は

$$\left(a,\ \frac{1}{a}\right),\ \left(\frac{1}{a^3},\ a^3\right)$$

以上から、領域 D は右図の斜線部分とその境界線となります。



(2)

【方針】

原則に従い、$x+y=k$ とおくと k は直線の y 切片を表します。この直線と領域 D が共有点を持つときに、y 切片が最大になるときと最小になるときをグラフから読み取ります。

【解説】

$x+y=k$ とおきます。

直線m： $y=-x+k$ と領域 D が共有点を持つときに y 切片の最大値と最小値をグラフから読み取ります。

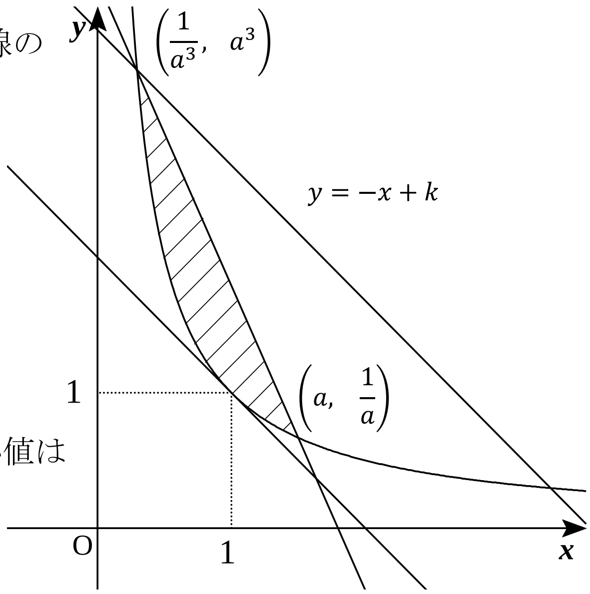
最大値は、直線 m が点 $\left(\dfrac{1}{a^3},\ a^3\right)$ を通るときで、

このとき

$$k=\frac{1}{a^3}+a^3$$

また、最小値は直線 m と曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ が接する

ときで、接点の座標を$\left(t,\ \frac{1}{t}\right)$とおけば、接線の



傾きは、$-\dfrac{1}{t^2}$ で表されるので

$$-\frac{1}{t^2}=-1$$

$$t^2=1$$

$t>0$ より$t=1$

接点の座標は(1, 1) となり、このとき最小値は

$$k=1+1=2$$

以上により

$$\begin{cases} x=1,\ y=1 \text{ のとき、} x+y \text{ の最小値 } 2 \\ x=\dfrac{1}{a^3},\ y=a^3 \text{ のとき、} x+y \text{ の最大値 } \dfrac{1}{a^3}+a^3 \end{cases}$$

-----参考--

直線$x=a$ に関して法線 n と線対称となる直線 $y=f(x)$ を求めるときに、次のような方法もあります。

Ⅰ）平行移動して、y 軸対称を利用する方法。

$y=g(x)$ をy 軸に対称移動した直線の方程式が $y=g(-x)$ になることを利用します。

法線 n： $y=a^2x-a^3+\dfrac{1}{a}$ を x 軸方向に $-a$ 平行移動すると

$$y=a^2(x+a)-a^3+\frac{1}{a}=a^2x+\frac{1}{a}$$

y 軸に関して、対称移動すると

$$y=a^2(-x)+\frac{1}{a}=-a^2x+\frac{1}{a}$$

x 軸方向に、a 平行移動すると

$$y=-a^2(x-a)+\frac{1}{a}=-a^2x+a^3+\frac{1}{a}$$

Ⅱ）図から、傾きを読み取る方法。

傾きがa^2 の法線と $x=a$ に関して対称な

直線の傾きは、$-a^2$ となります。従って、

$y=f(x)$ は、傾き $-a^2$、点$\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$ を通る直線なので

$$y=-a^2(x-a)+\frac{1}{a}=-a^2x+a^3+\frac{1}{a}$$