

昭和大学医学部入試問題

2013 年 I 期数学

解答・解説編

①小問集合

○原則

(1) ◆直線のベクトル方程式

点 $A(\vec{a})$ を通り、ベクトル $\vec{d}$ に平行な直線

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d} \quad (t: \text{実数})$$

2 点 $A(\vec{a}), B(\vec{b})$ を通る直線

$$\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) \quad (t: \text{実数})$$

◆2つのベクトルの直交条件

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad (\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

(2) ◆三角関数の相互関係

$$\text{i) } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \text{ii) } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \text{iii) } 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

◆2倍角の公式

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

(3) ◆余事象を使った確率の計算

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

◆期待値の計算

ある試行によって得られる数値を $x_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$, そのときの確率を $P(x_i)$ とします。この試行の期待値は、次の式となります。

$$\sum_{i=1}^n x_i \cdot P(x_i)$$

◆Σの計算

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1), \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

○解答・解説

(1)

【方針】

ベクトルの問題で「垂直」とあったら「内積が 0」を使います。この問題では、 $\overrightarrow{PH} \perp \overrightarrow{AB}$ なので、 $\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ を使います。3 点 A, B, P は与えられているので、点 H を設定します。そのとき点 H が直線 AB 上にあることを用いましょう。

【解説】

直線 PH と直線 AB が垂直、つまり $\overrightarrow{PH} \perp \overrightarrow{AB}$ なので、

$$\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \cdots \textcircled{1}$$

次に、 $\overrightarrow{PH}$, $\overrightarrow{AB}$ を成分表示します。

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-4, 0, 12) - (2, -3, 0) = (-6, 3, 12) = 3(-2, 1, 4) \cdots \textcircled{2}$$

ここで、点 H は直線 AB 上にあるので、 t を実数として、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} \\ &= (2, -3, 0) + t(-6, 3, 12) \\ &= (-6t + 2, 3t - 3, 12t) \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PH} &= \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OP} \\ &= (-6t + 2, 3t - 3, 12t) - (-4, -6, 3) \\ &= (-6t + 6, 3t + 3, 12t - 3) \\ &= 3(-2t + 2, t + 1, 4t - 1) \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

②④を①に代入して、

$$\begin{aligned} 3(-2t + 2, t + 1, 4t - 1) \cdot 3(-2, 1, 4) &= 0 \\ 9\{(-2t + 2)(-2) + (t + 1) \cdot 1 + (4t - 1) \cdot 4\} &= 0 \\ 21t - 7 &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore t = \frac{1}{3} \quad \textcircled{3} \text{に代入して、} \overrightarrow{OH} = (0, -2, 4) \quad \therefore \text{点 H}(0, -2, 4)$$

(2)

【方針】

(2-1)まず、角度を揃えることを考えます。角度が揃っていないと、三角関数の主な公式が利用できません。この問題では、 $\sin \theta$ を次のように変形します。

$$\sin \theta = \sin 2 \cdot \frac{\theta}{2} = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

これで角度が揃ったので、三角関数の相互関係を利用して、式変形します。

(2-2) (2-1)と同様に $\cos \theta$ を t で表すことができれば、 t についての方程式がたちます。

【解説】

(2-1) 三角関数の角度が揃っていないので、 $\frac{\theta}{2}$ に揃える方向で式変形します。

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \sin 2 \cdot \frac{\theta}{2} = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ &= 2 \tan \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ &= 2 \tan \frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{2t}{1 + t^2}\end{aligned}$$

(三角関数の相互関係より)

$$\sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$$

(2-2) $\tan \frac{\theta}{2}$ の値を求める、つまり t の値を求めるので、 t についての方程式をたてること

を目指します。(2-1)より $\sin \theta$ は t で表せています。同様に $\cos \theta$ も t で表すことができれば、条件より t についての方程式がたちます。

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \cos 2 \cdot \frac{\theta}{2} = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} - 1 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{1 + t^2} - 1 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\end{aligned}$$

$$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{5} \text{より、}$$

$$\begin{aligned}\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} &= -\frac{1}{5} \\ 10t + 5(1-t^2) &= -(1+t^2) \\ 4t^2 - 10t - 6 &= 0 \\ 2t^2 - 5t - 3 &= 0 \\ (2t+1)(t-3) &= 0\end{aligned}$$

$$t = -\frac{1}{2}, 3$$

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ より、 } \tan \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2}, 3$$

(3)

【方針】

確率は、具体的に考えると解法が見えてきます。例えば、(3-1)(3-2)では、 $m=3$ で実験してみましょう。(3-3)は余事象を考えます。(3-4)は期待値の定義に従って、計算します。

【解説】

(3-1) 1 回目は、番号 m 以外の $n-1$ 枚のカードから選び、2 回目に番号 m のカードを選ぶので、その確率は、

$$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$$

(3-2) 得点が m 点になるには、1 回目は m より小さい番号のカードを選び、2 回目に番号 m のカードを選ばばよい。番号が m より小さいカードは全部で $m-1$ 枚あるので、求める確率は、

$$\frac{m-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{m-1}{n(n-1)}$$

(3-2) 得点が 0 点になるには、1 回目に引いたカードの番号が 2 回目のカードの番号より大きいときです。しかし、そのような場合を考えるのは、ちょっと大変です。そんな時は、余事象を考えてみましょう。

X を得点とします。 X の取り得る範囲は $X=0, 2 \leq X \leq n$ なので、「 $X=0$ 」の余事象は、「 $2 \leq X \leq n$ 」となります。よって、求める確率は、

$$P(X=0) = 1 - P(2 \leq X \leq n)$$

ここで、 $P(2 \leq X \leq n)$ は、(3-2)の結果を利用して、

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq n) &= \sum_{m=2}^n \frac{m-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{m=2}^n (m-1) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{1}{2}(n-1)(1+n-1) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore P(X=0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$\sum_{m=2}^n (m-1)$ は
初項 1, 末項 $(n-1)$, 項数 $(n-1)$
の等差数列の和です。

(3-4) 期待値は、次の式で表されます。

$$\sum_{m=2}^n mP(X=m) = \sum_{m=2}^n \frac{m(m-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{m=2}^n m(m-1)$$

$$= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) \quad (\text{ただし、} k=m-1)$$

$k=m-1$ と置き換える
ことで、 $\sum$ は、 $k=1$ から
始まります。

$$= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 + k) = \frac{1}{n(n-1)} \left\{ \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) + \frac{1}{2}n(n-1) \right\}$$

$$= \frac{1}{6}(2n-1) + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{3}$$

----- (参考) -----

$\sum_{k=1}^n k(k+1)$ は、次のようにも計算できます。

$$\begin{aligned} k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1) &= k(k+1)\{(k+2) - (k-1)\} \\ &= k(k+1) \cdot 3 \end{aligned}$$

より、

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \{ (1 \cdot 2 \cdot 3 - 0) + (2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3) + \cdots \\
&\quad + n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1) \} \\
&= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)
\end{aligned}$$

この問題では、 $n-1$ までの和なので、

$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{1}{3} (n-1)n(n+1) = \frac{n+1}{3}$$

②二次曲線

○原則

1. ◆接線の方程式

関数 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は、

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

2. ◆共通接線

関数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ が与えられたとき、共通接線が存在する条件は、それぞれの接点の座標を $(s, f(s))$, $(t, g(t))$ とした 2 つの接線

$$\begin{cases} y = f'(s)(x - s) + f(s) \\ y = g'(t)(x - t) + g(t) \end{cases}$$

が、一致するような s, t が存在するということです。

3. ◆放物線における接線の本数と接点の数は一致します。

4. ◆直線と放物線の交点の数 直線 $y = f(x)$ と放物線 $y = g(x)$ が与えられたとき、それらの交点の個数は、 y を消去して得られる x についての 2 次方程式の解の個数と一致します。

○解答・解説

(1)

【方針】

共通接線を求めるので、 C_1, C_2 それぞれに接点を設定し C_1, C_2 の接線の方程式を求めましょう。得られた2つの接線は一致するので、傾きと定数項が等しいことを利用して式をたてます。

【解説】

C_1 上の点 (s, s^2) における接線の方程式は、

$$y = 2s(x - s) + s^2 = 2sx - s^2 \dots ①$$

C_2 上の点 (t^2, t) における接線の方程式は、

$$x = 2t(y - t) + t^2 = 2ty - t^2 \dots ②$$

ここで、 $t = 0$ のときの接線は $x = 0$ ですが、この直線は C_1 に接しないため $t \neq 0$ として、

$$y = \frac{1}{2t}x + \frac{t}{2} \dots ②$$

①②が一致することから、直線の傾きと定数項が等しくなり、

$$\begin{cases} 2s = \frac{1}{2t} \\ -s^2 = \frac{t}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4st = 1 \dots ③ \\ -2s^2 = t \dots ④ \end{cases}$$

③④から、 $8s^3 = -1$ 。従って、

$$s = -\frac{1}{2} \quad (t = -\frac{1}{2})$$

①に代入して、求める接線の方程式は

$$\underline{y = -x - \frac{1}{4}}$$

(2)

【方針】

C_2 の接線が2本引けることから、 C_2 上の接点が2個必要です。まず、接点の座標を

(t^2, t) において、接線の方程式を求めましょう。そして、その接線が点 P を通ることから、 t についての 2 次方程式が得られます。接点が 2 個となる条件は、この 2 次方程式が相異なる 2 つの実数解をもつことです。

【解説】

(1)と同様に、 C_2 上の接点を (t^2, t) とおくと、接線の方程式は

$$x = 2ty - t^2$$

この接線が、点 $P(p, p^2)$ を通ることから、

$$p = 2tp^2 - t^2 \Leftrightarrow t^2 - 2p^2t + p = 0 \dots \textcircled{5}$$

ここで、 t についての 2 次方程式⑤を解くということは、接点の x 座標を求めることに他なりません。また、放物線において接線の本数と接点の数が一致することから

$$\text{接線が 2 本} \Leftrightarrow \text{接点が 2 個} \Leftrightarrow D > 0 \text{ (D は⑤の判別式)}$$

従って、

$$\frac{D}{4} = p^4 - p > 0$$

$$p(p-1)(p^2+p+1) > 0 \dots \textcircled{6}$$

$$p^2 + p + 1 = \left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ なので、⑥の解は、} p < 0, p > 1$$

$$\therefore p < 0, \quad p > 1$$

(3)

【方針】

(1)(2)を利用する。

【解説】

点 P を通る C_2 の接線が 2 本あるので、(2)より $p < 0, p > 1$

この範囲の中から、2 本の接線が C_1 と P 以外の点で交わらない場合を除きます。

つまり除外するのは、この接線が C_1 にも接する場合です。これは、(1)より

$$p = -\frac{1}{2} \text{ のときです。}$$

$$\therefore p < -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} < p < 0, \quad 1 < p$$

(4)

【方針】

直線 Q_1Q_2 と曲線 C_2 が接する条件は、直線 Q_1Q_2 と曲線 C_2 を表す方程式から連立して得られる2次方程式が、重解をもつことです。そこでまず、直線 Q_1Q_2 の方程式を求めましょう。

【解説】

まず、直線 Q_1Q_2 の方程式を求めます。2点 Q_1, Q_2 は異なるので、 $q_1 \neq q_2$ 。従って、直線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{q_1^2 - q_2^2}{q_1 - q_2}(x - q_1) + q_1^2 \\ &= (q_1 + q_2)(x - q_1) + q_1^2 \\ &= (q_1 + q_2)x - q_1q_2 \cdots \textcircled{7} \end{aligned}$$

次に⑦と、曲線 $C_2: y^2 = x \cdots \textcircled{8}$ が接する条件を考えます。
⑦⑧から、 x を消去して、

$$(q_1 + q_2)y^2 - y - q_1q_2 = 0$$

この2次方程式の判別式 D' が0のとき、⑦と⑧が接するので、

$$q_1 + q_2 \neq 0 \text{ かつ } D' = 1 + 4(q_1 + q_2)q_1q_2 = 0$$

$q_1 + q_2 \neq 0$ は、 $1 + 4(q_1 + q_2)q_1q_2 = 0$ に含まれるので、

$$\therefore q_1q_2(q_1 + q_2) = -\frac{1}{4}$$

(5)

【方針】

(4)が利用できます。それには、2点 Q_1, Q_2 の x 座標が必要となるので、 Q_1, Q_2 の座標について調べます。その為に、 C_2 の接線の方程式が必要となるので、 C_2 上の接点を設定し接線の方程式を求めます。その接線と $C_1: y = x^2$ を連立して、 Q_1, Q_2 の座標を調べます。(4)を利用するとき、 Q_1, Q_2 の x 座標どうしの和と積の値さえ計算できればいいので、実際に x 座標の値を計算する必要はなく、解と係数の関係を使って計算するといいでしょう。

【解説】

(4)の結果を利用する為に、2点 Q_1, Q_2 の座標について調べましょう。
まず、 C_2 の2つの接線の方程式を求めます。

C_2 上の点 (t^2, t) における接線の方程式は、

$$x = 2ty - t^2 \cdots (\text{イ})$$

(イ)が、点 (p, p^2) を通るので、

$$p = 2tp^2 - t^2$$

$$t^2 - 2p^2t + p = 0 \cdots (\text{ロ})$$

(ロ)を解くと接点の座標が求まり、さらに C_2 の接線の方程式も分かります。ここでは、計算を複雑にしないために、(ロ)の2つの解を α, β とおきます。

点Pを通る C_2 の接線は(イ)より、

$$x = 2\alpha y - \alpha^2 \cdots (\text{ハ}), \quad x = 2\beta y - \beta^2 \cdots (\text{ニ})$$

の2本です。また、解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = 2p^2 \cdots (\text{ホ}), \quad \alpha\beta = p \cdots (\text{ヘ})$$

条件より、(3)の結果から $p \neq 0$ であり、 $\alpha\beta \neq 0$ 。従って、 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ です。

次に、接線(ハ)と、 $C_1: y = x^2 \cdots (\text{ト})$ との交点を調べます。題意より、交点の一つは、点P (p, p^2) であり、もう一つは点 $Q_1(q_1, q_1^2)$ とおけます。

(ハ)(ト)より、 y を消去して、 $2\alpha x^2 - x - \alpha^2 = 0$

解と係数の関係から、

$$p + q_1 = \frac{1}{2\alpha}, \quad pq_1 = -\frac{\alpha}{2}$$

同様にして、接線(ニ)と、 C_1 との交点を調べます。題意より、交点の一つは、点P (p, p^2) であり、もう一つは点 $Q_2(q_2, q_2^2)$ となります。

(ニ)(ト)より、 y を消去して、 $2\beta x^2 - x - \beta^2 = 0$

解と係数の関係から、

$$p + q_2 = \frac{1}{2\beta}, \quad pq_2 = -\frac{\beta}{2}$$

これで、準備ができました。後は、 $q_1 + q_2, q_1q_2$ を計算して(4)の利用を目指します。

$$\begin{aligned}
 q_1 + q_2 &= \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2\beta} - 2p = \frac{\alpha + \beta}{2\alpha\beta} - 2p \\
 &= \frac{2p^2}{2p} - 2p \quad (\because (\text{ホ})(\sim)) \\
 &= -p
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_1 q_2 &= \left(-\frac{\alpha}{2p}\right) \left(-\frac{\beta}{2p}\right) = \frac{\alpha\beta}{4p^2} \\
 &= \frac{p}{4p^2} \quad (\because (\text{ホ})(\sim)) \\
 &= \frac{1}{4p}
 \end{aligned}$$

よって、

$$q_1 q_2 (q_1 + q_2) = \frac{1}{4p} \cdot (-p) = -\frac{1}{4}$$

従って、(4)から直線 $Q_1 Q_2$ は、 C_2 と接します。

③小問集合

○原則

(1) ◆双曲線の焦点と漸近線

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ に対して、焦点は $(\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ 漸近線は $y = \pm \frac{b}{a}x$ です。

◆双曲線の接線の方程式

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (s, t) における接線の方程式は、 $\frac{s}{a^2}x - \frac{t}{b^2}y = 1$ です。

◆2直線の直交条件

2直線 $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ が直交する
 $\Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

(2) ◆整数問題では、不等式を利用して解を絞ることがあります。この問題では、条件が不等式なので、この方針で考えます。

◆対数の底の条件と真数条件

$\log_a b$ において、底の条件は、 $0 < a$, $a \neq 1$ 、真数条件は、 $0 < b$ となります。

◆対数の底の変換

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (0 < a, a \neq 1, 0 < b, 0 < c, c \neq 1)$$

(3) ◆一次変換

1 次変換 f によって、点 (x, y) が点 (x', y') に移るとします。一次変換 f を表す行列を A とおくと、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

◆ケーリーハミルトンの定理

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ のとき、 } A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O$$

これより、 A^2 は、 A の一次式で表すことができます。さらに繰り返し使うことで、 A^n (n : 自然数) も A の一次式で表すことができます。

○解答・解説

(1)

【方針】

原則を利用して求めます。

【解説】

(1-1) 双曲線 H の焦点の座標は、 $(\pm\sqrt{16+9}, 0) = \underline{(\pm 5, 0)}$

(1-2) 双曲線 H の漸近線は、 $y = \pm \frac{3}{4}x$ 。傾きが正なので、 $y = \frac{3}{4}x$

(1-3) 接点の座標を (s, t) とおくと、接線の方程式は、

$$\frac{s}{16}x - \frac{t}{9}y = 0$$

これと $3x - 4y = 0$ が直交するので、2 直線の直交条件から

$$\frac{s}{16} \times 3 + \left(-\frac{t}{9}\right) \times (-4) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{16}s + \frac{4}{9}t = 0 \dots \textcircled{1}$$

また、 (s, t) は双曲線 H 上の点なので、

$$\frac{s^2}{16} - \frac{t^2}{9} = 1 \dots \textcircled{2}$$

①②より、 s を消去して、

$$\left(-\frac{16}{3} \cdot \frac{4}{9}t\right)^2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{9}t^2 = 1$$

$$\frac{4^4}{3^6}t^2 - \frac{1}{3^2}t^2 = 1$$

$$\left(\frac{16^2 - 9^2}{3^6}\right)t^2 = 1$$

$$\frac{(16+9)(16-9)}{27^2}t^2 = 1$$

$$t^2 = \frac{27^2}{25 \cdot 7} \therefore t = \pm \frac{27}{5\sqrt{7}} = \pm \frac{27\sqrt{7}}{35}$$

また、

$$s = -\frac{16}{3} \cdot \frac{4}{9}t = -\frac{16}{3} \cdot \frac{4}{9} \left(\pm \frac{27\sqrt{7}}{35}\right) = \mp \frac{64\sqrt{7}}{35}$$

よって、接点の座標は、

$$\left(\frac{64\sqrt{7}}{35}, -\frac{27\sqrt{7}}{35}\right), \left(-\frac{64\sqrt{7}}{35}, \frac{27\sqrt{7}}{35}\right),$$

(2)

【方針】

a, b を不等式でおさえることを考えます。与えられた対数不等式は、底が揃っていません。底の変換公式で揃えてから、式変形をしていきます。底と真数の条件を忘れずに。

【解説】

まず、底の条件と真数条件を確認します。

$$\log_a b > \log_b a^4 + 3 \dots \textcircled{3}$$

より、底と真数の条件から $0 < a, a \neq 1, 0 < b, b \neq 1$

このことと、 a, b が整数であることから、 $a \geq 2, b \geq 2 \dots \textcircled{4}$

次に、③の不等式では対数の底が揃っていませんので、底を a で揃えて、

$$\log_a b > \frac{\log_a a^4}{\log_a b} + 3 = \frac{4}{\log_a b} + 3 \dots \textcircled{5}$$

ここで、 $t = \log_a b$ とおきます。④より $t > 0$ で、⑤は次のようになります。

べき乗を計算してしまうと、大変です。後で平方根をとるので、べき乗を残すのが計算のコツです。

$$t > \frac{4}{t} + 3$$

$$t^2 > 4 + 3t \quad (\because t > 0)$$

$$t^2 - 3t - 4 > 0$$

$$(t - 4)(t + 1) > 0$$

$$t < -1, t > 4$$

$t > 0$ より、 $t > 4$ 。従って、 t を元に戻して

$$\log_a b > 4 = \log_a a^4$$

$$b > a^4 \quad (\because \textcircled{4})$$

これで、 a, b に関する不等式が導かれました。条件、 $9a > b$ と合わせて、

$$9a > b > a^4 \dots \textcircled{5}$$

$$9a > a^4$$

$$9 > a^3 \quad (\because \textcircled{4})$$

この不等式を満たす 2 以上の整数は、 $a = 2$ だけです。

このとき、 $\textcircled{5}$ より $18 > b > 16$ 。これを満たす整数は、 $b = 17$ となります。

$$\therefore a = 2, b = 17$$

(3)

【方針】

(3-1)は、 A を設定して原則に従い、条件から式をたてていきます。出てきた式を連立して A を求めます。(3-2)は次数が大きいので、ケーリーハミルトンの公式を利用して次数を下げます。最初に A^2 がどうなるのか、計算してみましょう。

【解説】

(3-1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (a, b, c, d は実数) とおき、条件を使って a, b, c, d についての連立方程式を立てていきます。

まず一次変換 f によって、直線 l が直線 m に移ることを使いましょう。

s を実数として、直線 l 上の点 $(s, s + 2)$ が一次変換 f によって移る点は、

$$A \begin{pmatrix} s \\ s + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ s + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} as + b(s + 2) \\ cs + d(s + 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} as + bs + 2b \\ cs + ds + 2d \end{pmatrix}$$

となります。この点が直線 m 上にあるので、

$$(as + bs + 2b) + (cs + ds + 2d) - 3 = 0$$

$$(a + b + c + d)s + 2b + 2d - 3 = 0$$

この式が、すべての実数 s について成り立つには、

$$a + b + c + d = 0 \cdots \textcircled{4}$$

$$2b + 2d - 3 = 0 \cdots \textcircled{5}$$

同様に、一次変換 f によって、直線 m が直線 l に移ることを使います。 t を実数として、直線 m 上の点 $(t, -t + 3)$ が一次変換 f によって移る点は、

$$A \begin{pmatrix} t \\ -t + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -t + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at + b(-t + 3) \\ ct + d(-t + 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at - bt + 3b \\ ct - dt + 3d \end{pmatrix}$$

となります。この点が直線 l 上にあるので、

$$(at - bt + 3b) - (ct - dt + 3d) + 2 = 0$$

$$(a - b - c + d)t + 3b - 3d + 2 = 0$$

この式が、すべての実数 t について成り立つには、

$$a - b - c + d = 0 \cdots \textcircled{6}$$

$$3b - 3d + 2 = 0 \cdots \textcircled{7}$$

$$\textcircled{5}\textcircled{7}より、b = \frac{5}{12}, d = \frac{13}{12}$$

$$これらと\textcircled{4}\textcircled{6}より、a = -\frac{13}{12}, c = -\frac{5}{12}$$

$$\text{従って、} A = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -13 & 5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}$$

(3-2) A^{2013} は次数が大きいので、次数を下げることを考えます。それには、ケーリー・ハミルトンの定理を使います。定理から、

$$A^2 - \left(-\frac{13}{12} + \frac{13}{12}\right)A + \left\{\left(-\frac{13}{12}\right) \cdot \frac{13}{12} - \frac{5}{12} \left(-\frac{5}{12}\right)\right\}E = 0$$

$$A^2 - \frac{18 \cdot 8}{12^2}E = 0$$

$$A^2 = E$$

この結果を使って、 A^{2013} の次数を下げます。つまり、

$$A^{2013} = (A^2)^{1006} \cdot A = E^{1006} \cdot A = A = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}$$

④微分積分

○原則

1. ◆関数 $y = f(x)$ の増減

I) ある区間で常に、 $f'(x) > 0 \Rightarrow$ その区間で $f(x)$ は単調増加。

II) ある区間で常に、 $f'(x) < 0 \Rightarrow$ その区間で $f(x)$ は単調減少。

III) ある区間で常に、 $f'(x) = 0 \Rightarrow$ その区間で $f(x)$ は定数。

2. ◆関数 $y = f(x)$ の極大・極小

極大： $x = a$ で、 $f'(x)$ の値が正から負に変化するとき、 $x = a$ で極大、 $f(a)$ を極大値といいます。

極小： $x = a$ で、 $f'(x)$ の値が負から正に変化するとき、 $x = a$ で極小、 $f(a)$ を極小値といいます。

3. ◆置換積分

方法 I) $x = g(t)$ とおく。

$$\int f(x)dx = \int f(x) \frac{dx}{dt} dt = \int f(g(t))g'(t)dt$$

方法 II) $g(x) = t$ とおく。

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t) \frac{dt}{dx} dx = \int f(t)dt$$

○解答・解説

(1)

【方針】

原則により極小値を求めるには、 $f'(x)$ の正負を知る必要があります。 $f'(x)$ を求め増減表を作りましょう。増減表から極小を読み取ります。

【解説】

$f(x) = x(1 - x^2)e^{x^2}$ とおきます。微分して増減表を作りましょう。

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - x^3)e^{x^2} \\ f'(x) &= (1 - 3x^2)e^{x^2} + (x - x^3) \cdot 2x \cdot e^{x^2} \end{aligned}$$

積の微分法を使います。

$$\begin{aligned}
&= (1 - x^2 - 2x^4)e^{x^2} \\
&= -(2x^4 + x^2 - 1)e^{x^2} \\
&= -(2x^2 - 1)(x^2 + 1)e^{x^2}
\end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ となるのは、 $x^2 + 1 > 0$ より、

$$2x^2 - 1 = 0$$

$$\therefore x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

x	...	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...
$f'(x)$	—	0	+	0	—
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

この結果から、増減表は右のようになります。

極小は、 $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ のときで、極小値は

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{2}\right)e^{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}e}{4}$$

(2)

【方針】

面積を計算するには定積分ですが、今回は置換積分の方法Ⅱを使います。また、与えられた関数が奇関数であることに注意すると、余計な計算をしなくて済みます。

【解説】

まず、 $y = f(x)$ のグラフを書いて、どのような図形の面積を計算するのか明らかにしましょう。(1)の増減表から、グラフを次のようになります。

x 軸との交点の座標は、 $f(x) = 0$ より、

$$x(1 - x^2) = 0 \quad \therefore x = 0, \pm 1$$

また、 $f(-x) = -f(x)$ となるので $f(x)$ は奇関数です。奇関数は原点对称となるので、求める面積 S は、

$$S = 2 \int_0^1 x(1 - x^2)e^{x^2} dx$$

この積分は、置換積分を利用しましょう。

$t = e^{x^2}$ とおくと、

$$x^2 = \log t, \quad \frac{dt}{dx} = 2xe^{x^2} = 2xt$$

x	$0 \rightarrow 1$
t	$1 \rightarrow e$

よって、

$$S = 2 \int_1^e x(1 - \log t) t \cdot \frac{dt}{2xt} = \int_1^e (1 - \log t) dt$$

ここで、

$$\int \log t \, dt = t \log t - \int t \cdot \frac{1}{t} dt = t \log t - t$$

部分積分を使います。

より、

$$S = [t - (t \log t - t)]_1^e = (e - e + e) - (1 - 0 + 1) = e - 2$$

$$\therefore S = e - 2$$
