東京医科大学入試問題

2015年数学

解答・解説編

①小問集合

○原則

(1) ◆ベクトルの内積

$\vec{a} \neq \vec{0},\ \vec{b} \neq \vec{0}$、$\vec{a}$ と$\vec{b}$ のなす角をθ とします。$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$

と定義されます。とくに

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}| \cos 0 = |\vec{a}|^2$$

また、 $\vec{a} = (x_1, y_1),\ \vec{b} = (x_2,\ y_2)$ のとき

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

(2) ◆接線の方程式

関数 $y = f(x)$ 上の点 $\left(a,\ f(a)\right)$ における接線の方程式は、

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

◆共通接線

関数 $y = f(x),\ y = g(x)$ が与えられたとき、共通接線が存在する条件は、それぞれの接点の座標を$\left(s, f(s)\right),\ \left(t, g(t)\right)$ とした 2 つの接線

$$\begin{cases} y = f'(s)(x - s) + f(s) \\ y = g'(t)(x - t) + g(t) \end{cases}$$

が、一致するようなs, t が存在するということです。

○解答・解説

(1)

【方針】

ベクトルの大きさにかかわる計算は、2 乗して内積の計算に持ち込みます。この問題では、与えられた等式の両辺を 2 乗します。すると、各ベクトルの大きさ $|\vec{a}|,\ |\vec{b}|,\ |\vec{c}|,\ |\vec{d}|$ と内積 $\vec{a} \cdot \vec{b},\ \vec{c} \cdot \vec{d}$ の値が必要となるので、それらを各ベクトルの成分を利用して計算します。最終的に、t についての 2 次方程式に帰着します。

【解説】

与えられた等式の両辺を 2 乗します。

$$|\vec{a} + t\vec{b}| = |\vec{c} + t\vec{d}|$$

$$|\vec{a} + t\vec{b}|^2 = |\vec{c} + t\vec{d}|^2$$

$$|\vec{a}|^2 + t^2|\vec{b}|^2 + 2t\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{c}|^2 + t^2|\vec{d}|^2 + 2t\vec{c}\cdot\vec{d} \cdots ①$$

ここで、$\vec{a} = (2,\ 1)$, $\vec{b} = (4,\ 3)$, $\vec{c} = (3,\ 0)$, $\vec{d} = (1,\ 2)$ より

$$|\vec{a}|^2 = 2^2 + 1^2 = 5$$

$$|\vec{b}|^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

$$|\vec{c}|^2 = 3^2 + 0^2 = 9$$

$$|\vec{d}|^2 = 1^2 + 2^2 = 5$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2 \times 4 + 1 \times 3 = 11$$

$$\vec{c}\cdot\vec{d} = 3 \times 1 + 0 \times 2 = 3$$

これらを①に代入して

$$5 + 25t^2 + 2 \cdot 11t = 9 + 5t^2 + 2 \cdot 3t$$

$$20t^2 + 16t - 4 = 0$$

$$5t^2 + 4t - 1 = 0$$

$$(5t - 1)(t + 1) = 0$$

$$\therefore\ \underline{t = -1,\ \frac{1}{5}}$$

(2)

【方針】

放物線と接線の問題です。2 つの放物線C_1, C_2 それぞれに接点の座標を設定して、それぞれの接線の方程式を求めます。共通接線なので、それらの接線の傾きと y 切片が等しいことから、方程式を立てていきます。

【解説】

C_1 上の接点の座標を$(\alpha,\ \alpha^2)$, C_2 上の接点の座標を$(\beta,\ -(\beta - 9)^2 + 28)$ とおきます。

C_1 上の接線の方程式は

$y' = 2x$ より

$$y = 2\alpha(x - \alpha) + \alpha^2 = 2\alpha x - \alpha^2 \cdots ①$$

C_2 上の接線の方程式は

$y' = -2(x - 9)$ より

$$\begin{aligned} y &= -2(\beta - 9)(x - \beta) - (\beta - 9)^2 + 28 \\ &= -2(\beta - 9)x + 2\beta(\beta - 9) - (\beta - 9)^2 + 28 \\ &= -2(\beta - 9)x + \beta^2 - 53 \cdots ② \end{aligned}$$

よって、題意から①②は同じ直線を表すので、傾きと y 切片がそれぞれ等しくなります。即ち

$$\begin{cases} 2\alpha = -2(\beta - 9) \cdots ③ \\ -\alpha^2 = \beta^2 - 53 \cdots ④ \end{cases}$$

③から、$\alpha = -\beta + 9$

これを、④に代入して

$$-(-\beta + 9)^2 = \beta^2 - 53$$
$$2\beta^2 - 18\beta + 28 = 0$$
$$\beta^2 - 9\beta + 14 = 0$$
$$(\beta - 2)(\beta - 7) = 0$$
$$\beta = 2,\ 7$$

このとき、$\alpha = -2 + 9 = 7$, または $\alpha = -7 + 9 = 2$

①に代入して、求める接線の方程式は

$$\underline{y = 4x - 4, \qquad y = 14x - 49}$$

[別解]

【方針】

放物線と接線の問題なので、判別式が 0 となることを利用して求めることができます。まず、放物線 C_1 上の接点の座標を設定して、接線の方程式を求めます。その接線が放物線 C_2 と接するので、それぞれの方程式から y を消去して得られる x についての 2 次方程式が重解を持ちます。つまり判別式 $D = 0$ を利用します。

【解説】

放物線 C_1 上の接点の座標を$(t,\ t^2)$ とおきます。

C_1 上の接線の方程式は

$y' = 2x$ より

$y = 2t(x - t) + t^2 = 2tx - t^2$

この接線が、放物線 C_2 ：$y = -(x - 9)^2 + 28$ と接するためには、x についての 2 次方程式

$$2tx - t^2 = -(x - 9)^2 + 28 \cdots ⑤$$

が重解を持つことになります。

$$⑤ \Leftrightarrow x^2 + 2(t - 9)^2 + 53 - t^2 = 0$$

より、判別式を D として

$$\frac{D}{4}=(t-9)^2-(53-t^2)=0$$

$$2t^2-18t+28=0$$

$$t^2-9t+14=0$$

$$(t-2)(t-7)=0$$

$$t=2,\ \ 7$$

従って、求める接線の方程式は

$$y=4x-4,\qquad y=14x-49$$

②小問集合

○原則

(1) ◆置換積分

方法Ⅰ) $x=g(t)$ とおく。

$$\int f(x)dx=\int f(x)\frac{dx}{dt}dt=\int f\big(g(t)\big)g'(t)dt$$

方法Ⅱ) $g(x)=t$ とおく。

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx=\int f(t)\frac{dt}{dx}dx=\int f(t)dt$$

◆積分の公式

$$\int f'(x)\{f(x)\}^n dx=\frac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1}$$

(2) ◆曲線で囲まれる面積

2 つの曲線 $y=f(x), y=g(x)$ と 2 直線$x=a,\ x=b$で囲まれた面積 Sは、区間$[a,\ b]$で常に、$f(x)\geqq g(x)$ならば、

$$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$$

特に、曲線 $y=f(x)$ と x 軸、2 直線$x=a,\ x=b$で囲まれた面積 Sは、区間$[a,\ b]$で常に、$f(x)\geqq 0$ ならば、

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

◆関数の最大値・最小値を求める

基本の考えは、グラフを書いてグラフから最大値・最小値を読み取ることです。その為に微分して増減表を書きます。

たまに、有名不等式(相加平均・相乗平均の関係など)を使って解くこともあります。

〇解答・解説

(1)

【方針】

$\sqrt{1-x^2}$ とあったら、$x=\sin\theta$ とおいて置換積分を考えます。次に、三角関数の累乗を積分するときは、原則の公式を利用することを考えます。それには、その三角関数を微分した関数との積になっている必要があるので、そこを意識して式変形します。

【解説】

与えられた定積分を置換積分で計算します。

$x=\sin\theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$$

x	$0\to 1$
θ	$0\to\frac{\pi}{2}$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ より、$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta}=\cos\theta$ なので

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(x\sqrt{1-x^2}\right)^3dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\cos\theta)^3\cos\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos^4\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta(1-\cos^2\theta)\cos^4\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\sin\theta)(\cos^6\theta-\cos^4\theta)d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{(-\sin\theta)\cos^6\theta-(-\sin\theta)\cos^4\theta\}d\theta\end{aligned}$$

$\cos\theta$ を微分すると $-\sin\theta$ なので、$\sin\theta$ を 1 つ残すのがポイントです。

$$= \left[\frac{1}{7}\cos^7\theta - \frac{1}{5}\cos^5\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= -\frac{1}{7} + \frac{1}{5} = \underline{\frac{2}{35}}$$

[別解]
【方針】
$t = \sqrt{1-x^2}$ とおいて置換積分します。無理関数を含む積分では、根号全体を置き換えることで、積分がし易くなることがよくあります。

【解説】
$t = \sqrt{1-x^2}$ とおくと
$$\frac{dt}{dx} = -2x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{t}$$

x	$0 \to 1$
t	$1 \to 0$

また、$x^2 = 1 - t^2$

$$\int_0^1 \left(x\sqrt{1-x^2}\right)^3 dx = \int_1^0 (xt)^3 \left(-\frac{t}{x}\right) dt$$
$$= \int_0^1 x^2\, t^3 dt$$
$$= \int_0^1 (1-t^2)t^4 dt$$
$$= \int_0^1 (t^4 - t^6) dt$$
$$= \left[\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7\right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \underline{\frac{2}{35}}$$

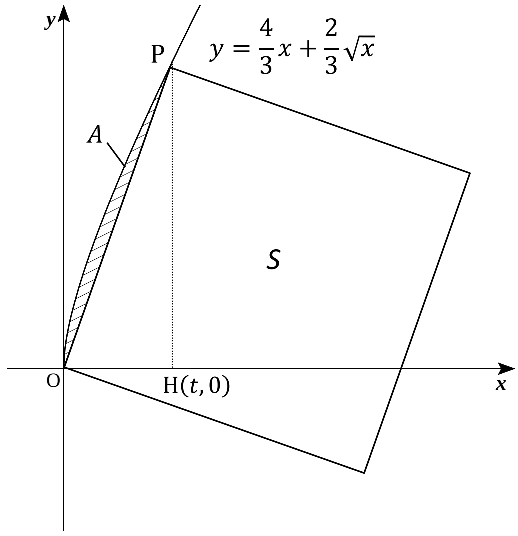
(2)
【方針】
点 P の座標を t で表して $\dfrac{A}{S}$ を t の関数で表します。原則に従って、増減表か相加平均・相乗平均の関係かどちらかを考えますが、この問題では、相加平均・相乗平均の関係が利用できます。

【解説】
曲線 C の概形を書くために微分して増減を調べます。

$y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}\sqrt{x}$

$$y' = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3\sqrt{x}} > 0$$

$$y'' = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}} = -\frac{1}{6x\sqrt{x}} < 0$$



より、曲線 C は増加関数で、上に凸となります。曲線 C 上の点 P の x 座標を t とおき、x 軸に下した垂線の足を点 H とします。

$$A = \int_0^t \left(\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}\sqrt{x}\right)dx - \triangle\,\mathrm{OPH}$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^t - \frac{1}{2}t\left(\frac{4}{3}t + \frac{2}{3}\sqrt{t}\right)$$

$$= \frac{2}{3}t^2 + \frac{4}{9}t\sqrt{t} - \frac{2}{3}t^2 - \frac{1}{3}t\sqrt{t}$$

$$= \frac{1}{9}t\sqrt{t}$$

次に、S は一辺の長さが OP の正方形の面積なので

$$S = \mathrm{OP}^2 = t^2 + \left(\frac{4}{3}t + \frac{2}{3}\sqrt{t}\right)^2$$

$$= \frac{25}{9}t^2 + \frac{16}{9}t\sqrt{t} + \frac{4}{9}t$$

よって

$$\frac{A}{S} = \frac{\frac{1}{9}t\sqrt{t}}{\frac{25}{9}t^2 + \frac{16}{9}t\sqrt{t} + \frac{4}{9}t}$$

$$= \frac{t\sqrt{t}}{25t^2 + 16t\sqrt{t} + 4t}$$

$$= \frac{1}{25\sqrt{t} + 16 + \frac{4}{\sqrt{t}}}$$

ここで、$\frac{A}{S}$ が最大となるのは、分母が最小となるときであり

$25\sqrt{t} > 0, \frac{4}{\sqrt{t}} > 0$ より相加平均・相乗平均の関係から

$$25\sqrt{t}+\frac{4}{\sqrt{t}} \geqq 2\sqrt{25\sqrt{t}\cdot\frac{4}{\sqrt{t}}}=20$$

$$25\sqrt{t}+16+\frac{4}{\sqrt{t}} \geqq 36$$

等号成立は

$25\sqrt{t}=\dfrac{4}{\sqrt{t}}$ のとき、即ち $t=\dfrac{4}{25}$

相加平均・相乗平均

$a>0,\ b>0$ のとき

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

（等号成立は $a=b$）

以上から

$$\frac{A}{S}=\frac{1}{25\sqrt{t}+16+\frac{4}{\sqrt{t}}} \leqq \frac{1}{36}$$

よって

$t=\dfrac{4}{25}$ のとき最大値 $M=\underline{\dfrac{1}{36}}$

③空間図形

○原則

1．◆空間上の 2 点間の距離

2 点 $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$B(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 間の距離は

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

○解答・解説

(1)

【方針】

点 $P(x,\ y,\ z)$ を設定します。条件として方程式が 2 つあるので、$y,\ z$ を x で表すことができます。そのことから AP^2 を x だけの式にすると、x についての 2 次関数となるので、平方完成して最小値を求めていきます。

【解説】

$P(x,\ y,\ z)$ とおきます。条件を使って、x, y, z の関係式を導き、AP^2 を x の関数で表

します。

A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 2) より

$$\mathrm{AP}^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2$$
$$\mathrm{BP}^2 = x^2 + (y-1)^2 + z^2$$
$$\mathrm{CP}^2 = x^2 + y^2 + (z-2)^2$$

AP = BP = CP より

$$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{BP}^2$$
$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-1)^2 + z^2$$
$$x = y$$

$$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{CP}^2$$
$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-2)^2$$
$$-2x + 1 = -4z + 4$$
$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = z$$

よって

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2 &= (x-1)^2 + x^2 + \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)^2 \\ &= \frac{9}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{25}{16} \\ &= \frac{9}{4}\left(x^2 - \frac{5}{9}x\right) + \frac{25}{16} \\ &= \frac{9}{4}\left\{\left(x - \frac{5}{18}\right)^2 - \frac{5^2}{18^2}\right\} + \frac{25}{16} \\ &= \frac{9}{4}\left(x - \frac{5}{18}\right)^2 - \frac{9}{4}\cdot\frac{25}{18^2} + \frac{25}{16} = \frac{9}{4}\left(x - \frac{5}{18}\right)^2 + \frac{25}{16}\left(1 - \frac{1}{9}\right) \\ &= \frac{9}{4}\left(x - \frac{5}{18}\right)^2 + \frac{25}{16}\cdot\frac{8}{9} = \frac{9}{4}\left(x - \frac{5}{18}\right)^2 + \frac{25}{18}\end{aligned}$$

従って

$x = \dfrac{5}{18}$, $y = \dfrac{5}{18}$, $z = \dfrac{8}{9}$ のとき、最小値 $\underline{M = \dfrac{25}{18}}$

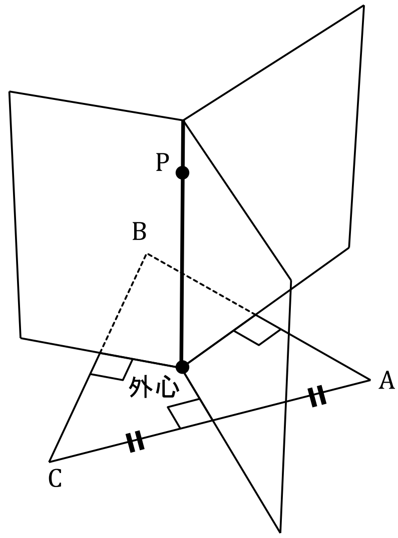
[別解]

【方針】

図形的に考えます。$AP = BP$ を満たす点 P は、線分 AB の中点を通り、線分 AB に垂直な平面上にあります。$BP = CP,\ CP = AP$ も同様に考えると、AP^2 は、点 P が△ABC の外心のときに最小値をとることが分かります。このとき AP は△ABC の外接円の半径となるので、正弦定理を使ってそれを求めます。

【解説】

$AP = BP$ を満たす点 P は、線分 AB の中点を通り、線分 AB に垂直な平面上にあります。同様に $BP = CP,\ CP = AP$ から、点 P は、それぞれの線分の中点を通り、線分に垂直な平面の交わりとなる直線上にあります。つまり、$AP = BP = CP$ を満たす点 P は、△ABC の外心を通り平面 ABC に垂直な直線上にあります。このとき AP が最小となるのは点 P が△ABC の外心と一致するときで、AP の長さは、△ABC の外接円の半径の長さとなります。それを正弦定理から求めます。



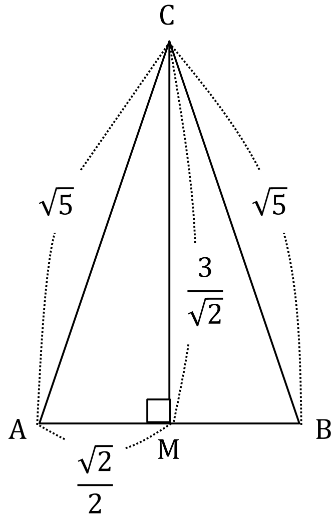
△ABC において

$$AC = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$
$$BC = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

より $AC = BC$ の 2 等辺三角形であり、AB の中点をM とおくと△AMC は直角三角形で

$$AM = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$CM = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \sqrt{5 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$



よって

$$\sin\angle CAM = \frac{CM}{AC} = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

△ABC の外接円の半径を R とおくと、正弦定理から

$$\frac{BC}{\sin\angle CAM} = 2R$$

$$\frac{\sqrt{5}}{\frac{3}{\sqrt{10}}} = 2R$$

$$R = \frac{\sqrt{50}}{6}$$

よって

$$m = R^2 = \frac{50}{36} = \underline{\frac{25}{18}}$$

④微分積分

○原則

(1) ◆三角関数の相互関係

$$\text{i)}\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{ii)}\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \text{iii)}\ 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

(2) ◆積分公式

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C \quad (C\ \text{は積分定数})$$

○解答・解説

(1)

【方針】

前半は、x_0 が曲線C_1, C_2 の交点の x 座標であることから、

$\tan x_0 = \frac{12}{7}\cos x_0$ が成り立ちます。これを式変形すると $\sin x_0$ についての方程式に帰着します。

後半は、三角関数の定積分です。$\tan x$ の積分は、原則の公式を使うと、簡単に求まります。

【解説】

x_0 は曲線C_1, C_2 の交点の x 座標なので

$$\tan x_0 = \frac{12}{7}\cos x_0$$

$$\frac{7\sin x_0}{\cos x_0} = 12\cos x_0$$

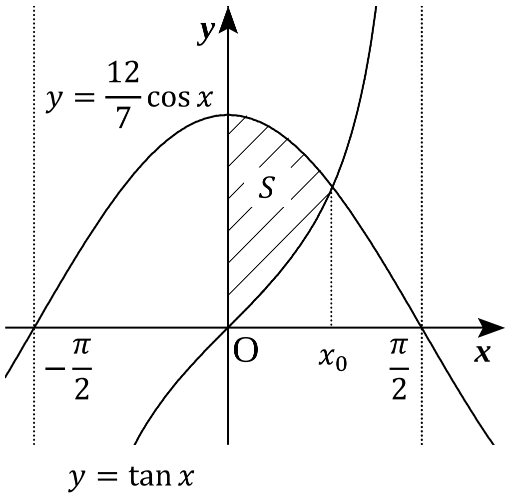
$$7\sin x_0 = 12\cos^2 x_0$$

$$7\sin x_0 = 12(1 - \sin^2 x_0)$$

$$12\sin^2 x_0 + 7\sin x_0 - 12 = 0$$
$$(4\sin x_0 - 3)(3\sin x_0 + 4) = 0$$

$-\dfrac{\pi}{2} < x_0 < \dfrac{\pi}{2}$ より、$-1 < \sin x_0 < 1$ なので

$$\underline{\sin x_0 = \frac{3}{4}}$$



次に、図から求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{x_0} \left(\frac{12}{7}\cos x - \tan x\right) dx \\ &= \int_0^{x_0} \left(\frac{12}{7}\cos x - \frac{\sin x}{\cos x}\right) dx \\ &= \int_0^{x_0} \left(\frac{12}{7}\cos x + \frac{(\cos x)'}{\cos x}\right) dx \\ &= \left[\frac{12}{7}\sin x + \log|\cos x|\right]_0^{x_0} \\ &= \frac{12}{7}\sin x_0 + \log|\cos x_0| \end{aligned}$$

ここで

$$\cos^2 x_0 = 1 - \sin^2 x_0 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$$

$-\dfrac{\pi}{2} < x_0 < \dfrac{\pi}{2}$ より、$\sin x_0 > 0$ なので

$$\cos x_0 = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

よって

$$\begin{aligned} S &= \frac{12}{7}\cdot\frac{3}{4} + \log\frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{9}{7} + \log\sqrt{\frac{7}{16}} \\ &= \underline{\frac{9}{7} + \frac{1}{2}\log\frac{7}{16}} \end{aligned}$$