1.11

⑴「～は必ずしも成立しないことを示せ」より、不等式が成り立たないような数の組み合わせが一つ見つかればよいということです。

→式変形をして解くよりも、具体的な数字の組み合わせを使って問題を解いていくほうが簡単でしょう。

⑵一般に、不等式を証明する際には文字と 0 との比較をします。

→今回も、問題文中の不等式の形のまま解くのではなく、$\mathrm{c}+\mathrm{d}-(\mathrm{a}+\mathrm{b})$と 0 を比較して考えようとします。

→このとき、⑵で与えられた条件$\mathrm{ab} \leq \mathrm{cd}$を代入して整理します。

→最終的に、$\mathrm{c}+\mathrm{d}-(\mathrm{a}+\mathrm{b}) \geq \cdots \geq 0$ とすることが目標なので、不等号の向きから$\mathrm{c} \geq \frac{ab}{d}$ または$\mathrm{d} \geq \frac{ab}{c}$ を代入しようと考えます。

→４つの文字の中で最大である c を不等式に残しておけば､大小関係を掴みやすいので､$\mathrm{d} \geq \frac{ab}{c}$ を代入します。

このとき、$\mathrm{c} \neq 0$でなければならないことに注意します。

⑶ ⑵で言ったように(右辺)―(左辺)と 0 を比較しようと考えるでしょうが、因数分解などの整理が極めて大変なので、この方法は選ばないことにします。

→すべての文字が負でないとき、$\mathrm{ab} \leq \mathrm{cd}$と$a^7b^7 \leq c^7d^7$ が同値であることに気づけば簡単です。

1.12

⑵このまま式変形しても行き詰るので、⑴を利用すると考えます。

与えられた条件式を見ると、左辺は因数分解したくなる形になっているのでまとめます。

→示したい不等式の最大次数は 3､一方で条件式の最小次数は 8 なので､なんとかして次数を下げようとします。

→⑴を利用して分解します。

分解の仕方について、最終的には$x^3$と$y^2$ が表れてほしいので、それらの項が登場するようにします。この組み合わせは簡単には見つからないでしょう。

1.13

$A_n, B_n$について、解答のように微積分を使うよりも、Σを使ってまとめていくほうが発想としては簡単です。

＊ $\frac{n!}{k!(n-k)!}$が何を表すかについてはすぐに思い浮かぶようになりましょう。

1.14

⑵ $\omega^3=1$となることより、ωが何乗であるかは乗数を３でわったときの余りで場合分けして解けばよいことがわかります。

⑶Σと二項定理には強い関係があります。Σのままでは直接計算できないので、今回はΣから二項定理になおして計算していきます。

(4) 式変形が難しく、誘導なしではなかなか手ごわい問題です。
左辺はΣで表された式ですが、右辺はそうではないので、右辺をΣで表そうと考えます。
これは、(3) と、(4) の等式を使えばよいだけです。
→現在、右辺の式は独立したΣが２つあるので、１つにまとめようと考えて、それぞれをとりあえず分解します。
(独立したΣ同士を、そのまま足し合わせることはできないため)
→最終的には両辺が等しくなればよいので、右辺が目指す式は左辺です。このことを念頭に置いて整理します。

*解答⑦のあとの関係式は非常に重要です。いつでも使えるようにしておきましょう。特に、今回のような複雑な整理が必要な場合に使うことが多いです。

1.15
(1) 数３の微積分を習っていれば、この問題は簡単です。
それ以外の解き方は、$\mathrm{f(x)} = (\text{定数})$とおいて、２次方程式が実数解を持つ条件を考えます。
→整理すると、$x^2$の係数は$(\mathrm{k}-1)$になり、グラフの形がよくわかりません(下に凸か、上に凸か)。解答では、解きやすくするために式を$(\mathrm{k}-1)$でわって$x^2$の係数を１にしています。

(2)　q がとる可能性のある数は、3, 2, 1 の３つなので、(1) より$\mathrm{f(x)}$がとる大体の範囲がわかることから具体的に考えられます。
*ただし、(1) では$\mathrm{x} \geq 0$なのに対して、(2) では$\mathrm{x} > 0$であることに注意しましょう。このような部分に気づかず記述しないと減点されてしまいます。

1.16
(1) 今までの考え方の通り、与えられた不等式を示すために、$\mathrm{f(a,b)} - \mathrm{g(a,b)} > 0$ を示します。

(2) 6 つの数を１つ１つ比較していくのは困難です。
→6 つの数は、それぞれ$\mathrm{f(a,b)}$ , $\mathrm{g(a,b)}$に値を代入したものなので、$\mathrm{a}$ , $\mathrm{b}$ , $\mathrm{f(a,b)}$ , $\mathrm{g(a,b)}$ の大小関係がわかれば、あとは具体的に値($\mathrm{a} = a_1, a_2, a_3 \quad b = b_1, b_2, b_3$) を入れて考えるだけです。

1.17
(2) $G_\alpha G_\beta$は２次式なので、$\mathrm{r}(G_\alpha G_\beta)$は計算で普通に求められます。このように、普通に解ける場面で何か工夫をする必要はありません。

(4) まず、$\mathrm{r}(PG_\beta) = 1$になるので、何とかして$\mathrm{r}(PG_\beta)$を$\mathrm{r}$を使わないで表そうと考えます。
→前問の利用で、(1) (2) を使っていくと、$\mathrm{r}(PG_\beta) = G_{\alpha\beta}$　になります。
→ここでは、$\beta$について求めたいので、(3) から$\alpha$を求めると、$\alpha \neq 0$ であることに注意して、(4) で与えられた条件を使います。
*(1)～(3) は、(4) を解くためのヒントになっています。(4) はそのまま見るとよくわからないので、前問を利用するということを念頭に置いて解き進めていきましょう。