

8. 座標

8.1

(1) 求める座標は、「点 p を通り直線 $ax + by + c = 0$ に垂直な直線と、直線 $ax + by + c = 0$ の交点」のことです。
→ 点 p を通り直線 $ax + by + c = 0$ に垂直な直線の方程式を立て、連立して解くだけです。

(2) 垂線の足を 3 つ求めることになります。

→ (1) と同様に計算していけばよいことにはなりますが、やや面倒です。

→ (1) の計算結果を利用しましょう。 a, b, c を具体的に求めればよいことになります。

→ 「垂線の足が一直線上にある」とは、それぞれの点をつないだ線のベクトルが一致する、ということです。

→ ベクトルを考えましょう。

8.2

(2) 「領域 D における $x - y \sim$ 」とは、 x, y がどちらも領域 D の範囲に含まれているということです。

→ $x - y = k$ (定数) とおくと、(1) で図示した部分を $y = x - k$ が通ればよいことになります。

→ 図を描いて、直線を動かしたときに領域 D を通るかどうか確かめましょう。

(3) (2) と同様に、 $|x| - |y| = (\text{定数})$ において、領域 D との関係を考えていきましょう。

8.3

(1) P_1, P_2 を通る直線を求めてから、 p, q と a_1, a_2, b_1, b_2 の関係を求めて、代入して…という解き方をしようとするかもしれません。しかし、この方法では非常に面倒です。

→ l_1, l_2 に点 A を代入してから式を見てみると、 $px + qy = 1$ が自動的に点 P_1, P_2 を通る直線であることが分かります。(異なる 2 点を通る直線は 1 つに決まるため。)

*この求め方は重要なので、覚えてしまっても構いません。

(3) 必要条件と、十分条件を、別々に調べていきましょう。

8.4

(1) 2 つの円が交点を持たないとき、① 1 つの円がもう一方の円の内部におさまっている ② 2 つの円が、交わることなく離れている のどちらかです。

→ 状況がよくわからないときは、簡単な図を描いて、どのような式を立てればよいのか考えましょう。

(2) (3) 交点を求めてから、その座標をもとに、求める方程式を考える…というのは大変です。また、交点の座標は複雑になるので難しいでしょう。

→ 2 つの円の交点を通る、直線や円の方程式は、

$k\{(x-1)^2 + (y-2)^2 - 4\} + l\{(x-4)^2 + (y-6)^2 - r^2\} = 0$ (k, l : 実数) で表されます。

*この式は重要なので覚えましょう。

→ 条件にあうような k, l の値を求めていきます。

8.5

(1)「 $\triangle OAB$ が C_2 に外接している」とあります。

→直線 OA, OB は、 C_2 に接している、ということです。

(2) $\alpha \cdot \beta$ を、 $s \cdot t$ で表してから計算する…というのは大変です。

→「 C_2 の接線と C_1 との2つの交点を P, Q とする」とあります。

→直線 PQ は、 C_2 に接している、ということです。

(3)直接、 $\beta \cdot \gamma$ を求めるのは大変です。

→ α と β 、 β と γ の関係は等しいことに注目します。

(4)「直線 QR は C_2 と接することを示せ」とあります。

→ C_2 の半径は1なので、直線と C_2 の中心との距離が1であればよいということです。

*この問題では、与えられた条件の言い換えが大切になっています。条件をそのまま使ってしまうと計算が非常に複雑になってしまうので、気をつけましょう。

8.6

(1)8.3(1)と同様にして簡単に求められます。

(2)「直線 l は、 t の値にかかわらず、ある円に接する」とあります。

→ある円の中心から直線 l までの距離が、 t がどんな値であっても変わらない、ということです。

→ある円の中心の座標を設定しよう、と考えます。このとき、 C_1, C_2 は y 軸対称なので、座標を $(0, a)$ などとおけば、文字が減らせて簡単になります。

解答では、 $a = -\frac{1}{4}$ をいきなり出していますが、 a の値がすぐに分からない場合は、

④で $\frac{|at^2 - 16a - 8|}{t^2 + 16} = k$ (定数)などにおいて、 t についての恒等式を立てて a の値を求めましょう。

8.7

(1) l は、すでに P を通ることは問題文から分かっているので、傾きが求められればよいことになります。

→直線の傾きは、 $\tan$ で表せることに気づけば、接線の傾きから 45° 反時計回りに回転させたものなので、 $\tan$ の加法定理から求められます。

(3) (2)の結果を利用します。数3の内容の微分で解けば、簡単に求められます。

→微分がまだ使えない場合は、工夫して解きます。

→文字の分数の場合、分子の乗数が分母よりも大きいと扱いづらいので、式変形をして、分子の乗数が分母の乗数よりも小さくなるようにします。

→相加平均・相乗平均の関係を使います。

*ここで相加平均・相乗平均の関係をもち出すのは、意外かもしれませんが、このような解き方で解く問題は数多くあります。覚えておきましょう。

8.8

(1) 点 Q の座標を求めるのに、①座標を使って解く(接線と直線 PQ が垂直、接線から P, Q までの距離が等しい)
②ベクトルを使って解く の 2通りの解き方があります。

どちらの解き方も、考え方は同じなので、どちらを選択してもよいでしょう。

(2) 「点 Q の軌跡が x 軸に平行な直線になったとする」とあります。

→点 Q の y 座標が、 t の値によらず一定になっているということです。8.6(2)のように、 $(y \text{ 座標}) = \text{定数}$ において t についての恒等式を立てましょう。

8.9

(1) 垂心とは、三角形の各頂点から対辺におろした垂線の交点のことです。

(2) 外心とは、三角形の各辺の垂直二等分線の交点のことです。

(ii) 問題文より、 A, B, C は相異なる 3 点なので、 a, b, c はすべて異なります。さらに、求めた x, y の形より、 $a \neq 0$ であることから、グラフの範囲は限定されることに注意しましょう。

8.10

まず、点 A を設定しなければ M の座標を表せないで、 $A(a, b)$ などとおきます。

→最終的には、点 M の軌跡を求めたいので、その軌跡の方程式を表すために $M(X, Y)$ などとおきます。

→問題文より、 $2a + 3b = 12 \cdots \textcircled{1}$ が成り立ちますが、最後に出てくるはずの軌跡の方程式は、 a, b を使うことなく X, Y を使って表さなければなりません。

→ a, b を X, Y を使って表し、①の式に代入すればよいと考え、 $a = (X, Y \text{ を使った式})$ 、 $b = (X, Y \text{ を使った式})$ とすることを目指します。

→地道に M の座標を求めてもよいのですが、やや大変なので工夫をしたほうがよいでしょう。解答では、相似になることとベクトルを上手く組み合わせて解いています。

8.11

最終的には線分 PQ の通る領域について考えることから、まずは点 P, Q を設定する必要があるでしょう。

→ $P(p, 0)$ $Q(0, q)$ などとくと、「線分 PQ が $\triangle OAB$ の面積を 2 等分する」ということから、 p, q についての条件式がたてられます。さらに、直線 PQ の式もたてられます。

→ p, q が動く範囲に注意しつつ、線分 PQ 内の点 (x, y) がどのように動くかを考察していきまし

*直線 PQ の式を p または q でまとめた後、別解のように p または q の方程式が解をもつような条件を考えて、線分 PQ 内の点 (x, y) の存在範囲をしぼっていくというやり方でもできます。

しかし、この考え方はやや高度なので、自信がなければ解答のように解くのが無難でしょう。

8.12

(1) (2) 「2 点 A, B から等距離にある点」とありますが、この点はすべて、線分 A, B の垂直二等分線上の点になります。

→(1)で求めた点の軌跡の方程式は、線分 A, B の垂直二等分線の式ということになります。

(2) (3) 「aが実数全体を動くとき、直線lが通る点(x,y)の全体を～」 「aが $a \geq 0$ の範囲を動くとき、直線lが通る点(x,y)の全体を～」とあります。

→aがある範囲で動くとき、直線lの方程式を満たすような実数aが存在すればよい、ということです。

*この考え方は非常に重要です。忘れないようにしましょう。

(4) (2) (3) の場合と大体は同じですが、直線 l の方程式を満たす a は、 $0 \leq a \leq 5$ の範囲で 1 つだけしか存在してはいけないことに注意します。

*全体を通して、どの部分を通るか・通らないか(境界線を含むのか・含まないか)、という判断が難しいです。丁寧に計算していきましょう。