東邦大学入試問題

2014 年数学

解答・解説編

①三角関数

○原則

１．◆周期関数

任意の x に対して、$f(x+p)=f(x)$ $(p\neq 0)$ が成り立つとき、$f(x)$ はp を周期とする周期関数であるといいます。また周期は、そのうちで最小の正の値をとります。

２．◆三角関数の周期

・$y=a\sin(kx+b)$　周期 $\dfrac{2\pi}{|k|}$　・$y=a\cos(kx+b)$　周期 $\dfrac{2\pi}{|k|}$

・$y=a\tan(kx+b)$　周期 $\dfrac{\pi}{|k|}$

○解答・解説

【方針】

原則に従い、$a\sin(kx+b)$ の周期が $\dfrac{2\pi}{|k|}$ となることを用います。

【解説】

$y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-3x\right)$ の周期は、$\dfrac{2\pi}{|-3|}=\underline{\dfrac{2\pi}{3}}$

②確率

○原則

１．◆期待値の計算

ある試行によって得られる数値を x_i $(i=1,2,3,\cdots,n)$, そのときの確率を$P(x_i)$とします。この試行の期待値は、次の式となります。

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot P(x_i)$$

○解答・解説

【方針】

Xの取り得る値を考え、それぞれの場合について確率$P(X)$を計算します。それを用いて原則に従い期待値を求めます。

【解説】

2つのさいころを投げたときの出た目を、それぞれa, bとします。

出た目の最小値Xを表にすると、右の表のようになります。

また、それぞれの確率$P(X)$は次のようになるので、

a \ b	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	4
5	1	2	3	4	5	5
6	1	2	3	4	5	6

X	1	2	3	4	5	6
$P(X)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

求める期待値は、

$$1 \cdot \frac{11}{36} + 2 \cdot \frac{9}{36} + 3 \cdot \frac{7}{36} + 4 \cdot \frac{5}{36} + 5 \cdot \frac{3}{36} + 6 \cdot \frac{1}{36} = \underline{\frac{91}{36}}$$

[別解]

Xの取り得る範囲は、$1 \leqq X \leqq 6$です。それぞれの場合の確率を求めてみます。

ｉ）$X = k \ (k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ のとき

$X = k$となるのは次の2つの場合がある

(ア)　$a = b = k$のとき　…1通り

(イ)　$a = k,\ k + 1 \leqq b \leqq 6$ または　$k + 1 \leqq a \leqq 6,\ b = k$ のとき

$a = k$となるとき、bの目は$(6 - k)$通りあり、同様に

$b = k$となるとき、aの目は$(6 - k)$通りあります。

従って、$2 \times (6 - k)$通り

(ア)(イ)より　$1+2 \times (6 - k)$通り…①

ⅱ）$X=6$ のとき

$a=b=6$ の 1 通りです。

これは①の式に$k=6$ を代入したときと同じ値になるので、

ⅰ）ⅱ）をまとめて

$X=k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$ となる場合の数は

$1+2\times(6-k)$通り

よって、確率 $P(X)$ は

$$P(X=k)=\frac{1+2\times(6-k)}{6^2}=\frac{13-2k}{36}$$

期待値は

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{6}k\cdot\frac{13-2k}{36}=\frac{1}{36}\sum_{k=1}^{6}(13k-2k^2)$$
$$=\frac{1}{36}\left\{13\cdot\frac{1}{2}\cdot6\cdot(6+1)-2\cdot\frac{1}{6}\cdot6\cdot(6+1)(2\cdot6+1)\right\}$$
$$=\frac{1}{36}(13\cdot3\cdot7-2\cdot7\cdot13)$$
$$=\frac{13\cdot7\cdot(3-2)}{36}=\underline{\frac{91}{36}}$$

③行列

○原則

１．◆逆行列

行列$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} は、$\Delta=ad-bc\neq0$ のとき存在して

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

２．◆合成変換

１次変換$f,\ g$ を表す行列がそれぞれ$A,\ B$ であるとします。合成変換$f\circ g$ を表す行列は，行列の積AB となります

○解答・解説

【方針】

f, g を表す行列の逆行列を求めて、原則に従い、合成変換を表す行列を求めます。

【解説】

1 次変換f, g を表す行列をそれぞれA, B とします。すなわち、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

一次変換 f^{-1}, g^{-1} を表す行列は、それぞれA^{-1}, B^{-1} となり

$$A^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 0 - (-1)(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 1 - (-1)(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

従って

$$f^{-1} \circ g^{-1} = A^{-1}B^{-1} = \left\{-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}\left\{-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}$$

④平面図形と三角比

○原則

１．◆正弦定理

△ABC において、次のことが成り立ちます。ただし、R は△ABC の外接円の半径です。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

２．◆余弦定理

△ABC において、次のことが成り立ちます。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

○解答・解説

【方針】

2 等辺三角形 ABD の、頂点 A から底 BD に垂線を下します。2 等辺三角形が出てきたら必ずこの補助線を引いてみましょう。底辺を 2 等分するので、計算がし易くなります。あとは、三角比を利用して計算していきます。

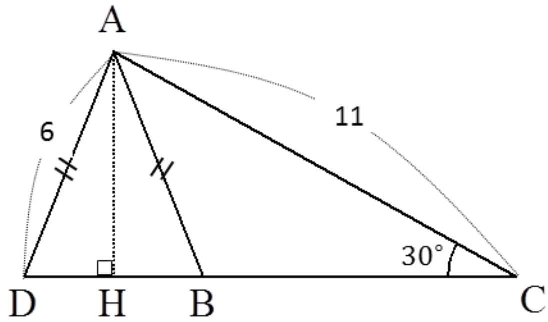
【解説】

△ABD の頂点 A から辺 BD に垂線 AH を下します。△ABD は、AB = AD の二等辺三角形なので、

$$\mathrm{BD} = 2\mathrm{DH}$$

次に△CAH から

$$\mathrm{AH} = \mathrm{AC}\sin 30^\circ = 11 \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$$



また、△AHD は直角三角形なので、

$$\mathrm{DH} = \sqrt{\mathrm{AD}^2 - \mathrm{AH}^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{11}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{12^2 - 11^2}{2^2}} = \frac{\sqrt{(12+11)(12-11)}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{23}}{2}$$

よって、

$$\mathrm{BD} = 2 \cdot \frac{\sqrt{23}}{2} = \underline{\sqrt{23}}$$

[別解]

（その１）

cos ∠ADB を求めてから DH の長さを求めます。

∠ADB = α とおきます。△ACD で、正弦定理から

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin\alpha} = \frac{\mathrm{AD}}{\sin 30^\circ}$$

$$\frac{11}{\sin\alpha} = \frac{6}{\frac{1}{2}} = 12$$

$$\sin\alpha = \frac{11}{12}$$

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ より、$\cos\alpha > 0$ なので

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{11}{12}\right)^2} = \frac{\sqrt{23}}{12}$$

よって、△AHD から

$$\mathrm{DH} = \mathrm{AD}\cos\alpha = 6\cdot\frac{\sqrt{23}}{12} = \frac{\sqrt{23}}{2} \quad \therefore\ \underline{\mathrm{BD} = \sqrt{23}}$$

（その２）

垂線が下せなかった場合は、$\cos\alpha$ を求めたあと、余弦定理を使います。

△ABD で余弦定理から

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AD}^2 - 2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cos\angle\mathrm{BAD}\\ &= 6^2 + 6^2 - 2\cdot 6\cdot 6\cos(180^\circ - 2\alpha)\\ &= 2\cdot 6^2 + 2\cdot 6^2\cos 2\alpha = 2\cdot 6^2(1+\cos 2\alpha)\\ &= 2\cdot 6^2\cdot 2\cos^2\alpha\\ &= 2\cdot 6^2\cdot 2\cdot\frac{23}{12^2} = 23\end{aligned}$$

$$\therefore\ \underline{\mathrm{BD} = \sqrt{23}}$$

⑤不定方程式

○原則

１．◆3 元連立 1 次方程式(解が無数に存在する場合)

x, y, z についての連立方程式

$$(*)\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \left(a, b, c, d, a', b', c', d' \text{ は定数}\right)$$

は、変数 3 つに対して、方程式が 2 つなので解は一意に定まりません。解は無数にあり、それらは一つの変数で表すことができます。

また、文字 k を用いて次のように解が表せます。

$$(x,\ y,\ z) = (lk + l',\ mk + m',\ nl + n')$$

○解答・解説

【方針】

与えられた 2 つの方程式を連立して、b と c を a で表せば $a+b+c$ はa の式になります。「ス・セ」が自然数となるように a を k の式で置き換えます。

【解説】

$$3a-2b-c=3 \cdots ①$$
$$2a-b-2c=0 \cdots ②$$

①−②×2 より

$$-a+3c=3$$
$$\therefore\ c=\frac{1}{3}a+1 \cdots ③$$

①×2−②より

$$4a-3b=6$$
$$\therefore\ b=\frac{4}{3}a-2 \cdots ④$$

③④より

$$a+b+c=a+\frac{4}{3}a-2+\frac{1}{3}a+1$$
$$=\frac{8}{3}a-1$$

ここで、$a=3(k+1)$ とすると$b=4(k+1)-2=4k+2,\ \ c=k+1+1=k+2$ となりa,b,c すべて整数です。また

$$a+b+c=8(k+1)-1$$
$$=\underline{8k+7}$$

⑥対数関数

○原則

1．◆対数の性質

$a,b,c>0,\ a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0,\ M,N>0$ とする。

Ⅰ） $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$　Ⅱ） $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

Ⅲ） $\log_a M^k=k\log_a M$　Ⅳ） $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$

○解答・解説

【方針】

対数の底を 2 に揃えて、式変形をしていきます。すると 3 次関数の最大値の問題に帰着します。増減表を書いて最大値を求めます。

【解説】

底を 2 に揃え、真数の商を対数の差にして$f(x)$ を式変形していきます。

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\log_2 \frac{2}{x}\right)\left(\log_2 \frac{x}{4}\right)\left(\log_4 \frac{4}{x}\right) \\ &= (\log_2 2 - \log_2 x)(\log_2 x - \log_2 4)(\log_4 4 - \log_4 x) \\ &= (1 - \log_2 x)(\log_2 x - 2)\left(1 - \frac{\log_2 x}{\log_2 4}\right) \\ &= (1 - \log_2 x)(\log_2 x - 2)\left(1 - \frac{\log_2 x}{2}\right) \end{aligned}$$

ここで、$y = f(x),\ \log_2 x = t$ とおきます。

$1 \leqq x \leqq 4$ より

$$\log_2 1 \leqq \log_2 x \leqq \log_2 4 \Leftrightarrow 0 \leqq t \leqq 2 \cdots ①$$

$$\begin{aligned} y &= (1-t)(t-2)\left(1 - \frac{t}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(1-t)(t-2)(2-t) \\ &= \frac{1}{2}(t-1)(t-2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2}\{(t-2)^2 + (t-1)\cdot 2(t-2)\} \\ &= \frac{1}{2}(t-2)\{(t-2) + 2(t-1)\} \\ &= \frac{1}{2}(t-2)(3t-4) \end{aligned}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	
y	-2	↗	極大	↘	0

増減表より、$t = \frac{4}{3}$ のとき最大値をとります。このとき、x の値は

$$\log_2 x = \frac{4}{3} \quad \therefore \quad x = 2^{\frac{4}{3}}$$

であり、また最大値は

$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}-1\right)\left(\frac{4}{3}-2\right)^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{27}$$

よって、

$x=2^{\frac{4}{3}}$ のとき最大値 $\underline{\frac{2}{27}}$

⑦整数問題

○原則

１．◆二項定理

$$(a+b)^n=a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_nC_{n-1}ab^{n-1}+b^n$$

一般項　${}_nC_ka^kb^{n-k}$ $(k=0,1,2,\cdots,n)$

$(a+b+c)^n$ の展開式

一般項　$\dfrac{n!}{p!\,q!\,r!}a^pb^qc^r$ $(p+q+r=n)$

２．◆合同式

$a,\ b$ を整数、m を自然数とします。a とb がm を法として合同であるとは、
「a をm で割ったときの余りとb をm で割ったときの余りが等しい」
ときのことをいい

$$a\equiv b\pmod{m}$$

で表します。

３．◆合同式の性質

$a,\ b,\ c,\ d$ を整数、$m,\ k$ を自然数とします

$a\equiv c\ (\mathrm{mod}\ m),\ b\equiv d\ (\mathrm{mod}\ m)$ のとき

Ⅰ）$a+b\equiv c+d\pmod{m}$　　Ⅱ）$a-b\equiv c-d\pmod{m}$

Ⅲ）$ab\equiv cd\pmod{m}$　　Ⅳ）$a^k\equiv b^k\pmod{m}$

○解答・解説

【方針】

$104^{12}=(98+6)^{12}$ として二項展開します。98 のべき乗の項は、98 で割った時の余りに影響しないので、無視できます。

【解説】

二項定理を利用して

$$\begin{aligned}104^{12}&=(98+6)^{12}\\&=98^{12}+{}_{12}C_1\cdot 98^{11}\cdot 6+{}_{12}C_2\cdot 98^{10}\cdot 6^2+\cdots+{}_{12}C_{11}\cdot 98^1\cdot 6^{11}+6^{12}\\&=98\times(\text{整数})+6^{12}\end{aligned}$$

より、104^{12} を 98 で割った余りは、6^{12} を 98 で割ったときの余りと等しくなります。

同様にして、6^{12} を 98 で割ったときの余りを考えます。

$$\begin{aligned}6^{12}&=(6^3)^4=216^4=(2\cdot 98+20)^4\\&=(2\cdot 98)^4+{}_4C_1\cdot(2\cdot 98)^3\cdot 20^1+{}_4C_2\cdot(2\cdot 98)^2\cdot 20^2\\&\qquad+{}_4C_3\cdot(2\cdot 98)^1\cdot 20^3+20^4\\&=98\times(\text{整数})+20^4\end{aligned}$$

従って、6^{12} を 98 で割ったときの余りは、20^4 を 98 で割ったときの余りと等しくなります。

さらに

$$\begin{aligned}20^4&=(20^2)^2=400^2=(4\cdot 98+8)^2\\&=(4\cdot 98)^2+2\cdot(4\cdot 98)\cdot 8+8^2\\&=98\times(\text{整数})+8^2\end{aligned}$$

よって、20^4 を 98 で割ったときの余りは、$8^2=64$

以上より、104^{12} を 98 で割った余りは $\underline{64}$

[別解]

【方針】

合同式を利用します。合同式の計算は、原則にもあるように等式のように計算することができます。

【解説】

104 を 98 で割ると余りは 6 なので、合同式を使うと

$$104 \equiv 6 \pmod{98}$$

両辺を 12 乗して

$$104^{12} \equiv 6^{12} \pmod{98} \cdots ①$$

この式が意味することは、104^{12} を 98 で割った余りと、6^{12} を 98 で割った余りは等しいということです。よって、6^{12} を 98 で割った余りを求めればよいことになります。

次に、6^{12} と合同になる数を求めます。$6^3 = 216$ で 216 を 98 で割った余りは 20 なので

$$6^3 \equiv 216 \equiv 20 \pmod{98}$$

各辺を 4 乗して

$$6^{12} \equiv (6^3)^4 \equiv 216^4 \equiv 20^4 \pmod{98} \cdots ②$$

これで、6^{12} と合同になる数が 20^4 であることが分かりました。続けて 20^4 と合同になる数を求めます。$20^2 = 400$ を 98 で割った余りは 8 なので

$$20^2 \equiv 400 \equiv 8 \pmod{98}$$

各辺 2 乗して

$$20^4 \equiv (20^2)^2 \equiv 400^2 \equiv 8^2 \pmod{98} \cdots ③$$

①②③より

$$104^{12} \equiv 6^{12} \equiv 20^4 \equiv 8^2 \equiv 64 \pmod{98}$$

従って、104^{12} を 98 で割った余りは、$\underline{64}$

⑧整式

○原則

1． ◆恒等式

$f(x),\ g(x)$ を整式とします。

$f(x) = g(x)$ が恒等式

$\Leftrightarrow$

$f(x)$, $g(x)$ の次数は等しく、両辺の同じ次数の項の係数はそれぞれ等しい

○解答・解説

【方針】

$f(x)$ が何次式なのかをまず求めます。そこで$f(x)$ がn 次式であるとして、n についての方程式をたてます。それには、与えられた恒等式の左辺と右辺の最高次が一致することを利用します。この問題では、右辺に 3 次の項があるので、最高次が 3 次以下になる場合と 4 次以上になる場合で分けて考える必要があります。

【解説】

与えられているx についての恒等式は

$$f(x^2) = x^2 f(x-1) - 2x^3 - 5 \cdots ①$$

$f(x)$ の次数で場合分けします。

ⅰ）$f(x) = k$ (定数) のとき

①より、

$$k = x^2 \cdot k - 2x^3 - 5$$

これはすべての実数x で成り立たないので不適です。

ⅱ）$f(x) = px + q$ のとき(1 次式)

①より

$$(px^2 + q) = x^2\{p(x-1) + q\} - 2x^3 - 5$$

$$px^2 + q = (p-2)x^3 + (q-p)x^2 - 5$$

x についての恒等式なので、各次数の係数を比較して

$$\begin{cases} 0 = p - 2 \\ p = q - p \\ q = -5 \end{cases}$$

しかし、この連立方程式を満たすp, q は存在しないので不適です。

ⅲ）$f(x)$ が n 次式($n \geqq 2$) のとき

$f(x)$ の最高次の項を ax^n とおきます。①において、左辺の最高次の項は

$$a(x^2)^n = ax^{2n}$$

また、右辺について$x^2 f(x-1)$ の最高次の項は

$x^2 \cdot a(x-1)^n$ より ax^{n+2} であり

ax^{n+2} は 4 次式以上なので右辺の最高次の項は、結局

ax^{n+2}

となります。よって最高次数を比較して

$2n = n + 2$

$\therefore\ n = 2$

つまり、$f(x)$ は 2 次式なので $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおきます。

①より

$$(\text{左辺}) = f(x^2) = ax^4 + bx^2 + c$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= x^2 f(x-1) - 2x^3 - 5 \\ &= x^2\{a(x-1)^2 + b(x-1) + c\} - 2x^3 - 5 \\ &= x^2\{a(x^2 - 2x + 1) + b(x-1) + c\} - 2x^3 - 5 \\ &= ax^4 - (2a - b + 2)x^3 + (a - b + c)x^2 - 5\end{aligned}$$

x についての恒等式なので、係数を比較して

$$\begin{cases} a = a \\ 0 = 2a - b + 2 \\ b = a - b + c \\ c = -5 \end{cases}$$

この連立方程式を解いて

$a = -3,\quad b = -4,\quad c = -5$

よって

$f(x) = -3x^2 - 4x - 5$

⑨数列

○原則

1． ◆数列　漸化式

階差数列の漸化式　$a_{n+1} = a_n + f(n)$

一般項 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$　$(n \geqq 2)$

○解答・解説

【方針】

与えられた漸化式の両辺を $a_{n+1}a_n$ で割ると、階差型の漸化式になります。これより、数列$\{a_n\}$ の一般項が求まります。その一般項から不等式を解きます。

最初に、a_n が 0 にならないことを確認します。

【解説】

$$(2n-1)a_{n+1}a_n = 5(a_{n+1}-a_n) \cdots ①$$

①の両辺を $a_{n+1}a_n$ で割るために、すべての自然数n に対して$a_n \neq 0$ であることを示します。

ⅰ）$n=1$ のとき $a_1 = \dfrac{1}{2014} \neq 0$

ⅱ）$n=k$ のとき、$a_k \neq 0$ と仮定します。

$$(2k-1)a_{k+1}a_k = 5(a_{k+1}-a_k)$$
$$\{(2k-1)a_k - 5\}a_{k+1} = -5a_k$$

$a_k \neq 0$ より

$$(2k-1)a_k - 5 \neq 0 \text{ かつ } a_{k+1} \neq 0$$

ⅰ）ⅱ）よりすべての自然数 n に対して、$a_n \neq 0$

①の両辺を $a_{n+1}a_n$ で割ると

$$2n-1 = 5\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) \cdots ②$$

ここで、$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと②は

$$2n-1 = 5(b_n - b_{n+1})$$
$$b_{n+1} - b_n = -\frac{1}{5}(2n-1)$$

また、$b_1 = \dfrac{1}{a_1} = 2014$

階差型の漸化式なので

$n \geqq 2$ のとき

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ -\frac{1}{5}(2n-1) \right\}$$

$$= 2014 - \frac{1}{5} \cdot (n-1)^2$$

$$= \frac{10070 - (n-1)^2}{5}$$

これは、$n = 1$ のときも成り立ちます。よって

$$a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{5}{10070 - (n-1)^2}$$

次に、$a_n < 0$ より $10070 - (n-1)^2 < 0$ を満たす最小の自然数 n を求めます。

$$10070 < (n-1)^2$$

$100^2 = 10000$，$101^2 = 10201$ より、$n - 1 = 101$

よって、$n = \underline{102}$

-----参考---

$a_n \neq 0$ を背理法で示すこともできます。

$$a_1 = \frac{1}{2014} \neq 0 \text{ なので}$$

$m \geqq 2$ のとき、$a_m = 0$ と仮定します。

漸化式より $n = m - 1$ として

$$\{2(m-1) - 1\} a_m a_{m-1} = 5(a_m - a_{m-1})$$

$a_m = 0$ より

$$0 = -5a_{m-1} \quad \therefore \quad a_{m-1} = 0$$

これを繰り返すと

$$a_m = a_{m-1} = a_{m-2} = \cdots = a_2 = a_1 = 0$$

$a_1 \neq 0$ に反して矛盾となります。

よって、すべての自然数 n に対して、$a_n \neq 0$

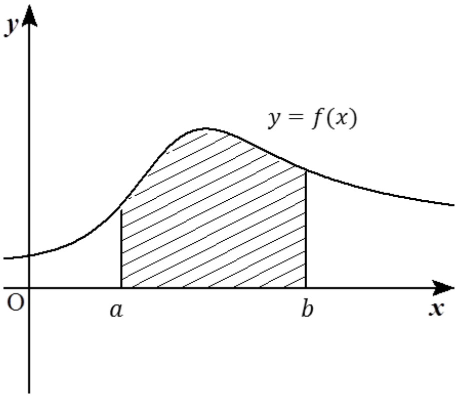
⑩積分

○原則

1．◆回転体の体積計算

曲線$y=f(x)$と直線$x=a$, $x=b$, x軸で囲まれた部分を、x軸回りに1回転させた回転体の体積Vは

$$\mathrm{V}=\int_a^b \pi\{f(x)\}^2\,dx$$



○解答・解説

【方針】

平面上でとらえます。2つの球の共通部分がどのような図形を回転したものか考え、回転体の体積計算に持ち込みます。1つの球の中心を原点に、もう1つの球の中心がx軸上となるように移動しても共通部分の体積は不変です。移動後に平面$z=0$で切ると、共通部分は円の一部を回転させた立体になることが分かります。

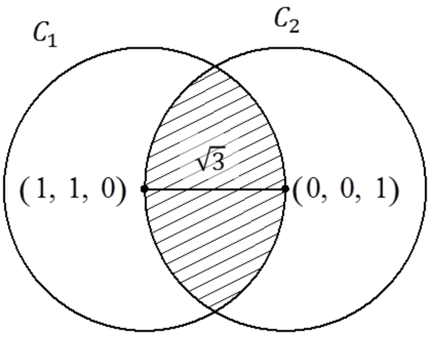
【解説】

球C_1：$(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=3$の中心は$(1,\ 1,\ 0)$で半径$\sqrt{3}$

球C_2：$x^2+y^2+(z-1)^2=3$の中心は$(0,\ 0,\ 1)$で半径$\sqrt{3}$

また、中心間の距離は

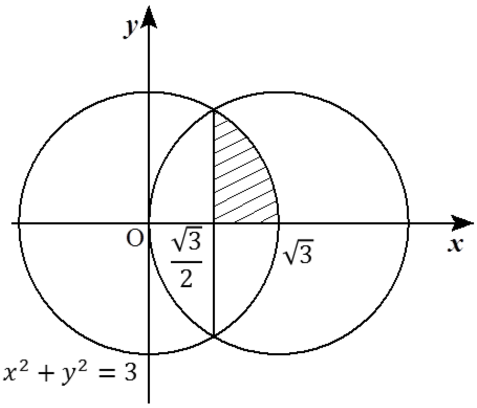
$$\sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{3}$$



ここで、球C_1の中心を原点、球C_1の中心が$(\sqrt{3},\ 0,\ 0)$となるように移動しても共通部分の体積は変わりません。

平面$z=0$で切ると、右図のようになります。従って、球C_1, C_2の共通部分の体積は

円$x^2+y^2=3$, 直線$x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, x軸で囲まれた右図の斜線部分をx軸の回りに1回転した回転体の体積を2倍したものに等しくなります。



よって

$$V = 2\pi \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} y^2 dx$$

$$= 2\pi \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} (3 - x^2) dx$$

$$= 2\pi \left[3x - \frac{x^3}{3}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}}$$

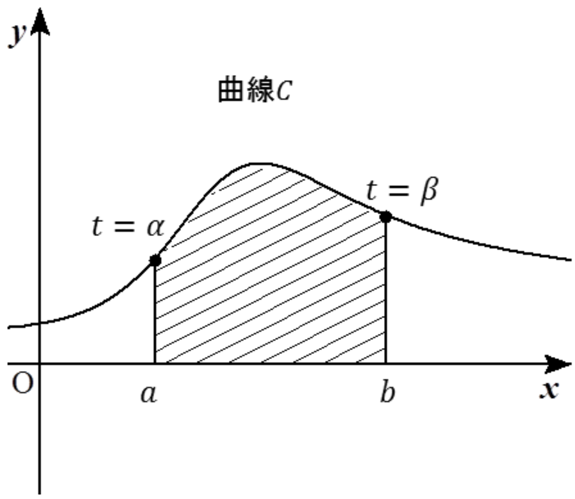
$$= 2\pi \left\{3\left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)\right\}$$

$$= 2\pi \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{21\sqrt{3}}{8}\right) = 2\pi \cdot \frac{12\sqrt{3} - 7\sqrt{3}}{8}$$

$$= \underline{\frac{5\sqrt{3}}{4}\pi}$$

⑪定積分

○原則



1．◆媒介変数表示された曲線で囲む面積

曲線C：$x = f(t)$, $y = g(t)$ において

曲線C, $x = a$, $x = b$, x 軸で囲まれた面積は

$$S = \int_a^b y dx = \int_\alpha^\beta y \cdot \frac{dx}{dt} dt$$

$$= \int_\alpha^\beta g(t) f'(t) dt$$

（ただし、$f'(t)$ は定符号で$g(t) \geqq 0$ とします。）

○解答・解説

【方針】

曲線 C のグラフを書いて、囲まれる部分を確認します。その為に、微分して増減表を書きます。この問題では曲線 C は媒介変数 t を用いて表されているので、

$\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}$ を計算して増減表を作ります。

【解説】

曲線 C のグラフを書きます。その為に増減表を作ります。

$x = t(2-t)$

$\dfrac{dx}{dt} = 2 - t - t = 2 - 2t$

$= 2(1-t) \cdots$①

$y = t(2-t)^2$

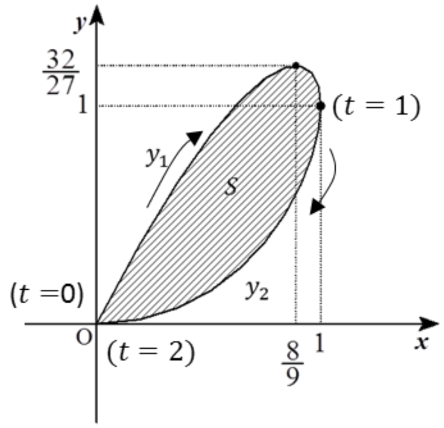
$\dfrac{dy}{dt} = (2-t)^2 + t\{-2(2-t)\}$

$= (2-t)(2-t-2t)$

$= (2-t)(2-3t)$

$= (t-2)(3t-2) \cdots$②

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$\frac{dx}{dt}$		+	+	+	0	−	
$\frac{dy}{dt}$	+	+	0	−	−	−	0
(x,y)	(0,0)	↗	$\left(\frac{8}{9},\frac{32}{27}\right)$	↘	(1,1)	↙	(0,0)



$0 \leqq t \leqq 1$ のときのグラフを$y = y_1$

$0 < t \leqq 2$ のときのグラフを$y = y_2$

とすると、求める面積 Sは

$$S = \int_0^1 y_1 dx - \int_0^1 y_2 dx$$

$$= \int_0^1 y \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt - \int_2^1 y \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt$$

$$= \int_0^1 t(2-t)^2 \cdot 2(1-t) \cdot dt + \int_1^2 t(2-t)^2 \cdot 2(1-t) \cdot dt$$

$$= \int_0^2 t(2-t)^2 \cdot 2(1-t) \cdot dt$$

$$= \int_0^2 t(2-t)^2 \cdot 2(1-t) \cdot dt$$

$$= \int_0^2 (-t^4 + 5t^3 - 8t^2 + 4t) dt$$

$$= \left[-\frac{1}{5}t^5 + \frac{5}{4}t^4 - \frac{8}{3}t^3 + 2t^2 \right]_0^2$$

$$= -\frac{1}{5}2^5 + \frac{5}{4}2^4 - \frac{8}{3}2^3 + 2 \cdot 2^2 = \underline{\frac{8}{15}}$$

-----参考---

$\displaystyle\int_0^2 t(2-t)^2(1-t)dt$ を次のように置換積分すると多少計算が簡単になります。

$u=2-t$ として、$du=-dt$

t	0	$\to$	2
u	2	$\to$	0

$$\begin{aligned}\int_0^2 t(2-t)^2(1-t)dt &= \int_2^0 (2-u)u^2(u-1)(-du)\\ &= \int_0^2(-u^4+3u^3-2u^2)du\\ &= \left[-\frac{u^5}{5}+\frac{3u^4}{4}-\frac{2u^3}{3}\right]_0^2=\frac{4}{15}\end{aligned}$$

⑫平面図形と三角比

○原則

1．◆3 倍角の公式

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$
$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

○解答・解説

【方針】

図を使って、$\dfrac{r}{R}$ を考えると $\cos 36^\circ$ を計算する問題に帰着します。

$36^\circ\times 5 = 180^\circ$ であることに着目して 3 倍角の公式から求めます。

【解説】

正 5 角形の内接円と外接円の中心を O とします。また、正 5 角形の 1 辺を AB とし AB と内接円の接点を H とします。

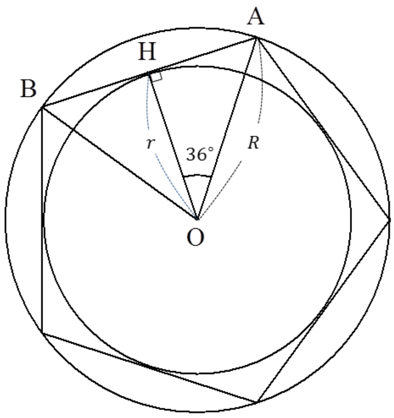
△OHA は∠OHA=90° の直角三角形であり、

$$\angle\mathrm{AOH}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{AOB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{5}=36^\circ$$

よって

$$\frac{r}{R} = \cos 36^\circ$$

ここで、$\theta = 36^\circ$ とおいて$\cos\theta$ の値を求めます。



$5 \times 36^\circ = 180^\circ$ なので、

$$5\theta = 180^\circ$$
$$3\theta = 180^\circ - 2\theta$$

両辺の cos をとると

$$\cos 3\theta = \cos(180^\circ - 2\theta) = -\cos 2\theta$$
$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta = -(2\cos^2\theta - 1)$$
$$4\cos^3\theta + 2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 1 = 0$$
$$(\cos\theta + 1)(4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1) = 0$$
$$\therefore\ \cos\theta = -1,\ \cos\theta = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$0 < \cos\theta < 1$ より

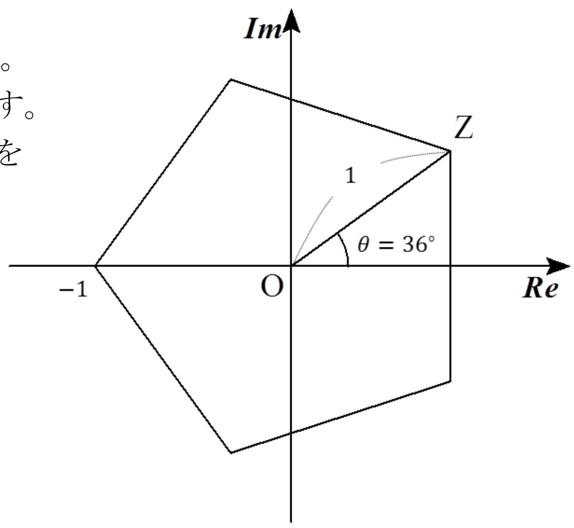
$$\cos\theta = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

よって

$$\frac{r}{R} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

[別解]

複素平面を使って、$\cos 36^\circ$ の値を考えます。
右図のように複素平面上に正五角形をとります。
第一象限にある正五角形の頂点を表す複素数を
z とすると



$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$

$5\theta = 180^\circ$ なので

$$\begin{aligned} z^5 &= \cos 5\theta + i\sin 5\theta \\ &= \cos 180^\circ + i\sin 180^\circ \\ &= -1 \end{aligned}$$
$$z^5 + 1 = 0$$
$$(z+1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) = 0$$

$z \neq -1$ より

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$$

$z \neq 0$ より

$$z^2 - z + 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$$

$$z^2 + \frac{1}{z^2} - \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0$$

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2z \cdot \frac{1}{z} - \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0$$

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0$$

ここで

$$z + \frac{1}{z} = z + z^{-1} = \cos\theta + i\sin\theta + \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$

$$= 2\cos\theta$$

なので

$$4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 = 0$$

$$\cos\theta = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$0 < \cos\theta < 1$ より

$$\cos\theta = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

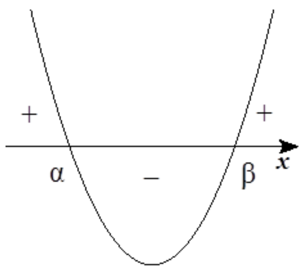
よって

$$\underline{\frac{r}{R} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}}$$

⑬微分と不等式

○原則

1．◆2 次不等式の解



$\alpha < \beta$ のとき $(x - \alpha)(x - \beta) > 0$ の解は

$$x < \alpha,\ \ \beta < x$$

〇解答・解説

【方針】

a についての 2 次不等式とみて解いていきます。与式の左辺は因数分解できることに注意します。

【解説】

$f(a)=(x^4+3)a^2-(3x^2-2x+9)a+2(x^4-x+3)$ とおきます。

$f(1)=0$ なので

$$\begin{aligned}f(a)&=(a-1)\{(x^4+3)a-2(x^4-x+3)\}\\&=(x^4+3)(a-1)\left(a-2\cdot\frac{x^4-x+3}{x^4+3}\right)\quad(\because\ \ x^4+3>0)\end{aligned}$$

$f(a)>0$ より

$$(x^4+3)(a-1)\left(a-2\cdot\frac{x^4-x+3}{x^4+3}\right)>0$$

両辺を$x^4+3\ (>0)$ で割って

$$(a-1)\left(a-2\cdot\frac{x^4-x+3}{x^4+3}\right)>0$$

ここで、$y=2\cdot\dfrac{x^4-x+3}{x^4+3}$ とおくと

$$(a-1)(a-y)>0\cdots①$$

y の値によって①の不等式の解が変わってくるので、y の取り得る値の範囲を求めます。

$$y=2\cdot\frac{x^4-x+3}{x^4+3}=2\left(1+\frac{-x}{x^4+3}\right)$$

$$\begin{aligned}y'&=2\cdot\frac{-(x^4+3)-(-x)\cdot 4x^3}{(x^4+3)^2}\\&=2\cdot\frac{3x^4-3}{(x^4+3)^2}=\frac{6(x+1)(x-1)(x^2+1)}{(x^4+3)^2}\end{aligned}$$

また

$$\lim_{x\to\pm\infty}y=\lim_{x\to\pm\infty}2\left(1+\frac{-x}{x^4+3}\right)=2$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	$\frac{5}{2}$	↘	$\frac{3}{2}$	↗

グラフより、$\dfrac{3}{2}\leqq y\leqq\dfrac{5}{2}\cdots②$

よって、①の解は、②から$y>1$なので、

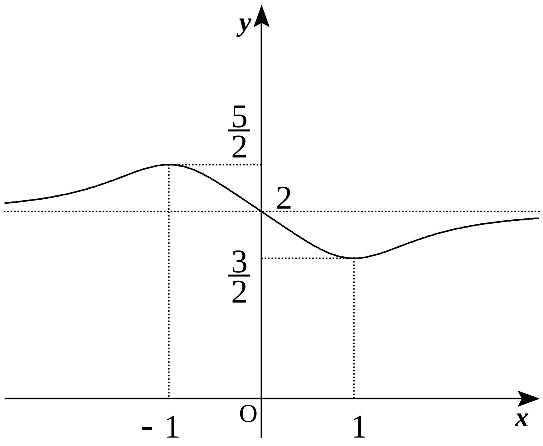
$$a<1, \qquad a>y$$

すべての実数xで$a>y$となるには、

$$②より, a>\frac{5}{2}\geqq y$$

以上より

$$\underline{a<1, \quad a>\frac{5}{2}}$$



⑭平面ベクトル

○原則

1．◆三角形の面積

△ABC において、∠A $=\theta$ とします。△ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta$$

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

○解答・解説

【方針】

点 O は外接円の中心なので、$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$, また $7\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ から、内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$ が求まります。これらの値と原則にある三角形の面積公式を用いて計算します。

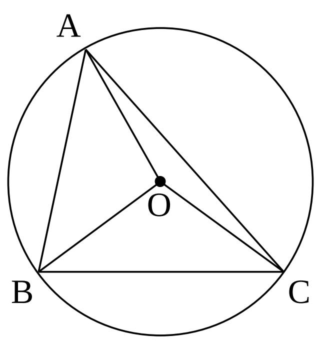
【解説】

点 O は外接円の中心であり、半径は 1 なので

$$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1\cdots①$$

また、条件より

$$7\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}=\vec{0}\cdots②$$



△ABC=△OAB+△OBC+△OCA
であり、△OAB、△OBC、△OCA の面積をそれぞれ、
S_1, S_2, S_3 とすると①を利用して

$$S_1=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)^2}$$
$$S_2=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)^2}$$
$$S_3=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)^2}$$

次に、内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}},\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を①②を用いて求めます。
②より

$$7\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\left(5\overrightarrow{\mathrm{OB}}+8\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$
$$49\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=\left|5\overrightarrow{\mathrm{OB}}+8\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2$$
$$=25\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2+64\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$49=25+64+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{1}{2}\cdots ③$$

同様にして

$$5\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\left(7\overrightarrow{\mathrm{OA}}+8\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$
$$25\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=\left|7\overrightarrow{\mathrm{OA}}+8\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2$$
$$=49\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+64\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2+2\cdot 7\cdot 8\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$25=49+64+2\cdot 7\cdot 8\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\frac{11}{14}\cdots ④$$

$$8\mathrm{OC}=-\left(7\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$
$$64\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2=\left|7\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2$$
$$=49\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+25\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2+2\cdot 7\cdot 5\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$25=49+64+2\cdot 7\cdot 8\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\frac{1}{7}\cdots ⑤$$

従って、③④⑤より△ABC の面積 S は

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1-\left(-\frac{1}{7}\right)^2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\left(-\frac{11}{14}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{7^2-1}{7^2}} + \sqrt{\frac{2^2-1}{2^2}} + \sqrt{\frac{14^2-11^2}{14^2}}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{8\cdot 6}}{7} + \frac{\sqrt{3\cdot 1}}{2} + \frac{\sqrt{25\cdot 3}}{14}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 4\sqrt{3}+7\sqrt{3}+5\sqrt{3}}{14} = \underline{\frac{5\sqrt{3}}{7}}$$

[別解]

（その１）

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right| \sin A$$

を利用します。先ほど計算した③④⑤を利用して

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 - 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$$

$$= 1 + 1 - 2\left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{16}{7} \cdots ⑥$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 - 2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$$

$$= 1 + 1 - 2\left(-\frac{11}{14}\right) = \frac{25}{7} \cdots ⑦$$

$$\cos\angle BOC = \frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{\left|\overrightarrow{OB}\right|\left|\overrightarrow{OC}\right|} = -\frac{1}{2}$$

よって、$\angle BOC = 120°$ であり円周角と中心角の関係から$\angle BAC=60°$

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right| \sin A$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{16}{7}}\sqrt{\frac{25}{7}}\sin 60°$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot 5}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\frac{5\sqrt{3}}{7}}$$

（その２）

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 - \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)^2}$$

を利用します。③④⑤から

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right)$$

$$= \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + \left|\overrightarrow{OA}\right|^2$$

$$= -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{7}\right) - \left(-\frac{11}{14}\right) + 1$$

$$= \frac{10}{7}$$

⑥⑦から

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{16}{7} \cdot \frac{25}{7} - \frac{10^2}{7^2}} = \frac{1}{14}\sqrt{(20+10)(20-10)}$$

$$= \frac{10}{14}\sqrt{3} = \underline{\frac{5\sqrt{3}}{7}}$$

⑮領域

○原則

１．◆軌跡・通過領域

軌跡や通過領域を求める方法として、自然流と逆手流の 2 通りの考え方があります。

Ｉ）自然流

動点 P（本問題では PQ の中点 M）を,その元になるもの（本問題では点 P と点 Q）で表して、点 P がどのような図形になるのかをとらえる方法です。

Ⅱ）逆手流

　ある点(X, Y) が求める領域内の点になり得るかどうかを調べていく方法です。本問題では、ある点(X, Y) が、線分 PQ の中点になり得るかどうかを調べます。なり得るかそうでないかは、そのような点 P と点 Q が存在するかしないかになります。つまり、点(X, Y) が線分 PQ の中点となるような、点 P と点 Q の存在条件を考えるのです。

○解答・解説

【方針】

　この問題は、自然流で考えます。つまり、線分 PQ の中点 M を 2 点 P,Q の座標を使って表します。そして、2 点 P,Q を動かして中点 M がどう動くのか考えます。その際 2 点P, Q を同時に動かすのはとても扱いにくいので、いったん点 P を固定し、点 Q だけを動かします。そして点 Q の条件から中点 M の動き得る領域 D を考えます。次に、点 P を動かして領域 D の動き得る領域を考えます。

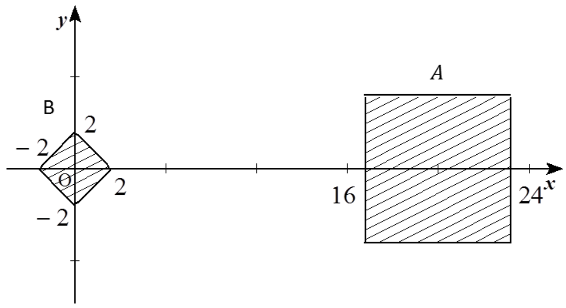
【解説】

　領域 A を図示します。

連立不等式 $\begin{cases} |x-20| \leqq 4 \\ |y| \leqq 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$

$\begin{cases} 16 \leqq x \leqq 24 \\ -4 \leqq y \leqq 4 \end{cases} \cdots ①$



　次に領域 B を図示します。

$|x| + |y| \leqq 2$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x+y \leqq 2 \ (x, y \geqq 0) \\ x-y \leqq 2 \ (x \geqq 0, y < 0) \\ -x+y \leqq 2 \ (x < 0, y \geqq 0) \\ -x-y \leqq 2 \ (x < 0, y < 0) \end{cases} \cdots ②$$

　動点 P, Q をそれぞれ$\mathrm{P}(s,\ t)$, $\mathrm{Q}(u,\ v)$ とおくと線分 PQ の中点$\mathrm{M}(X,\ Y)$ は

$$X = \frac{s+u}{2}, \qquad Y = \frac{t+v}{2}$$

　ここで、$s,\ t$ を固定して

$$u = 2X - s, \qquad v = 2Y - t$$

とみると

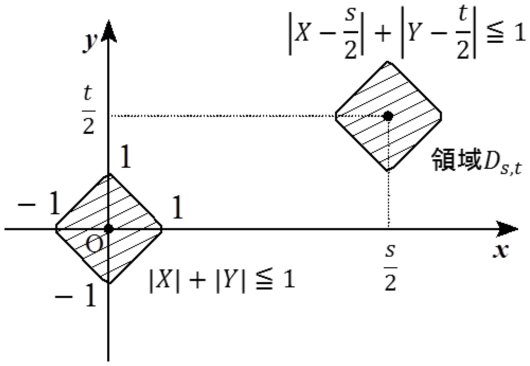
u, v は領域 B 内の点なので

$$|2X - s| + |2Y - t| \leqq 2$$

両辺 2 で割って

$$\left|X - \frac{s}{2}\right| + \left|Y - \frac{t}{2}\right| \leqq 1$$

この不等式が表す領域は、不等式$|X| + |Y| \leqq 1$ が表す領域を、x 軸方向に $\frac{s}{2}$、y 軸方向に $\frac{t}{2}$ 平行移動したものになり、この領域を$D_{s,t}$ とします。



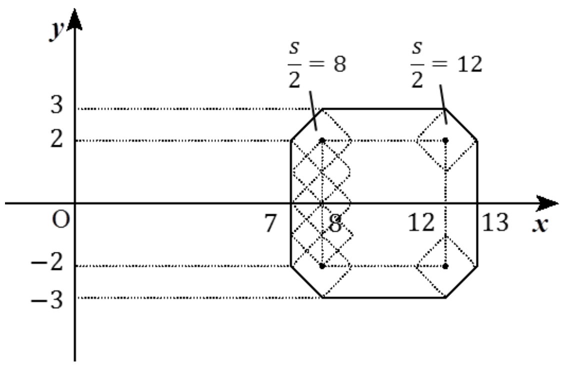
次に、$s,\ t$ を動かして、領域$D_{s,t}$ がどのように動くのか考えます。

①より $8 \leqq \frac{s}{2} \leqq 12, -2 \leqq \frac{t}{2} \leqq 2$ となります。

このとき、領域$D_{s,t}$ がどのように動くのかというと右図の内部と境界線上となります。

このような時でも、s, t どちらかを固定すると分かりやすいでしょう。例えば、

$\frac{s}{2} = 8$ と固定して、$\frac{t}{2}$ を -2 から 2 まで動かせば、図の左側の部分になります。



以上から、この領域が PQ の中点 M が動く領域となります。

求める面積は、1 辺の長さ 6 の正方形から 4 隅の直角 2 等辺三角形の面積を引いて

$$6 \times 6 - 4\left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1\right) = \underline{34}$$