

I

(1) $x^3 + 3x^2 - 6x - 8$

$$= (x+1)(x^2 + 2x - 8)$$

($\because$ 与えられた式は $x = -1$ のとき 0 になるので
 $x+1$ で割り切れることを利用した)

$$= (x-2)(x+1)(x+4). \dots(\text{ア})$$

$$(x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz$$

$$= \{x + (y+z)\} \{(y+z)x + yz\} - xyz$$

$$= (y+z)x^2 + (y+z)^2x + (y+z)yz$$

$$= (y+z)\{x^2 + (y+z)x + yz\}$$

$$= (x+y)(y+z)(z+x). \dots(\text{イ})$$

(2) 2人・3人・4人の3組に分ける場合

9人から2人の組, 3人の組を順に選べば残りの4人が自動的に決まると考えて,

$${}_9C_2 \cdot {}_7C_3 = 36 \cdot 35 = 1260 \text{ 通り}. \dots(\text{ウ})$$

2人・2人・2人・3人の4組に分ける場合

名前のついた3つの2人組を選び, その3つの組の入
れ替え方の $3! = 6$ 通りで割ればよいので

$$\frac{{}_9C_2 \times {}_7C_2 \times {}_5C_2}{3!} = 1260 \text{ 通り}. \dots(\text{エ})$$

(3) $g(x) = x^2 - 2ax + a^2 + a - 3$

$$= (x-a)^2 + a - 3$$

より, すべての x に対して $g(x) > 0$ が成り立つ条件は
 $f(x)$ の最小値が正となることである. よって

$$f(a) = a - 3 > 0 \text{ すなわち } a > 3. \dots(\text{オ})$$

また, 区間 $-1 \leq x \leq 1$ における $g(x)$ の最小値を m とす
ると, この区間で $g(x) \geq 0$ が成り立つ条件は, $m \geq 0$ と
なることである.

(i) $a < -1$ のとき

$$m = g(-1) = a^2 + 3a - 2 \geq 0$$

$$\text{より } a \leq \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \leq a.$$

$$a < -1 \text{ を考慮して } a \leq \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \dots \textcircled{1}$$

(ii) $-1 \leq a \leq 1$ のとき

$$m = g(a) = a - 3 \geq 0$$

$$\text{より } a \geq 3.$$

しかしこれは $-1 \leq a \leq 1$ を満たさない.

(iii) $a > 1$ のとき

$$m = g(1) = a^2 - a - 2 = (a+1)(a-2) \geq 0$$

$$\text{より } a \leq -1, 2 \leq a.$$

$$a > 1 \text{ を考慮して } a \geq 2 \dots \textcircled{2}$$

以上より, ①, ② をあわせて, 求める a の値の範囲は

$$a \leq \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}, 2 \leq a. \dots(\text{カ})$$

(4) ㊦ $\times$ である.

[証明] $90^\circ < \angle BAC < 180^\circ$ である $\triangle ABC$ の外接円の

中心(つまり外心)を O とする. $\widehat{BC}$ に対応する円周
角 $\angle BAC$ と中心角 $\angle BOC$ の関係より

$$\angle BOC = 2\angle BAC$$

なので $180^\circ < \angle BOC < 360^\circ$ となるから外心 O は
 $\triangle ABC$ の外部に存在する.

㊦ $\times$ である.

[証明] $\triangle ABC$ において, 外心かつ内心である点を P

とする.

P は外心であるから, 辺 BC の垂直二等分線上にあ
るので $\angle PBC = \angle PCB$ である.

また, P は内心でもあるから, BP, CP はそれぞれ
 $\angle B, \angle C$ の二等分線である. よって

$$\angle B = 2\angle PBC = 2\angle PCB = \angle C.$$

同様に $\angle A = \angle B$ も示されるので, $\triangle ABC$ は正三
角形である.

㊦ $\times$ である.

[証明] 有理数と無理数の和が有理数となった, すなわ
ち a, b を有理数, p を無理数とし, $a + p = b$ が成
立したと仮定する. このとき $p = b - a$ であり, 右
辺は有理数の差なので有理数であるが, 左辺は無理
数なのでこれは矛盾である. よって有理数と無理数
の和は無理数である.

㊦ $\times$ である.

[証明] 0 は有理数, π は無理数であるが, 積 $0 \cdot \pi = 0$
は有理数である. これが反例となっている.

(5) $g(x) = \log_3 x + \log_x 81$

$$= \log_3 x + \frac{\log_3 81}{\log_3 x}$$

であり, $\log_3 x = t$ とおくと $x > 1$ より $t > 0$ なので,
相加平均, 相乗平均の大小関係より

$$g(x) = t + \frac{4}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{4}{t}} = 4$$

ここで, 等号が成立するのは

$$t = \frac{4}{t} \text{ かつ } t > 0$$

$$\text{すなわち } t = 2 \Leftrightarrow x = 9$$

のときであるから, $g(x)$ は $x = 9 \dots(\text{サ})$ において最小値
4 $\dots(\text{シ})$ をとる.

(6) $\vec{a} \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = \vec{a} \cdot (\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1})$

$$= \vec{a} \cdot \overrightarrow{OP_2} - \vec{a} \cdot \overrightarrow{OP_1} = 1 - 1 = 0. \dots(\text{ス})$$

よって $\vec{a} \perp \overrightarrow{P_1P_2}$ なので $\vec{a}$ は平面 α に垂直である.

ゆえに $\overrightarrow{OH} = k\vec{a}$ と表すことができ, これと $\vec{a} \cdot \overrightarrow{OH} = 1$

より $k|\vec{a}|^2 = 1$ すなわち $k = \frac{1}{|\vec{a}|^2}$ となる.

したがって $\overrightarrow{OH} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2} \dots(\text{セ})$ と表される.

II

(1) $x_n = A$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成立するためには
 $x_2 = A$ が必要である. すなわち

$$A = aA + b \dots \textcircled{1} \Leftrightarrow A = \frac{b}{1-a}. \dots \textcircled{2}$$

逆にこのとき, $x_k = A$ であると仮定すると

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= ax_k + b = aA + b \\ &= a \cdot \frac{b}{1-a} + b = \frac{ab + b(1-a)}{1-a} \\ &= \frac{b}{1-a} = A \end{aligned}$$

となり, $x_{k+1} = A$ である. 以上より帰納的に

$$x_n = A \text{ } (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成立するので, ② は条件を満たす. よって

$$A = \frac{b}{1-a} \cdot \dots (\text{ソ})$$

$$(2) \quad x_{n+1} = ax_n + b \dots \textcircled{3} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

として, ③-① より

$$x_{n+1} - A = a(x_n - A)$$

すなわち $y_{n+1} = ay_n$ となるので, 数列 $\{y_n\}$ は公比 a の等比数列で $y_1 = x_1 - A$ より

$$y_n = y_1 a^{n-1} = (1-A)a^{n-1}$$

すなわち

$$x_n = y_n + A = (1-A)a^{n-1} + A \cdot \dots (\text{タ})$$

となる.

$$(3) \quad z_1 = 1 \neq 0 \text{ であることと, 与えられた漸化式から}$$

「 $z_n \neq 0 \Rightarrow z_{n+1} \neq 0$ 」が成立するので, 帰納的に

$$z_n \neq 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つ. ここで与えられた漸化式の逆数をとると

$$\frac{1}{z_{n+1}} = \frac{bz_n + \frac{1}{2}}{z_n}$$

すなわち

$$\frac{1}{z_{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z_n} + b.$$

さらにここで, $u_n = \frac{1}{z_n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ とおくと

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + b$$

となり, $u_1 = \frac{1}{z_1} = 1$ なので, (1), (2) で $a = \frac{1}{2}$ とした

$$A = \frac{b}{1-\frac{1}{2}} = 2b \text{ のときの結果が適用できるので}$$

$$u_n = (1-2b)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2b$$

となる. したがって

$$z_n = \frac{1}{u_n} = \frac{1}{(1-2b)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2b} \cdot \dots (\text{チ})$$

となり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-2b)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2b} = \frac{1}{2b} \cdot \dots (\text{ツ})$$

III

n 枚の札から, A, B, C の 3 人が 1 枚ずつ取り出す方法は全部で ${}_nP_3 = n(n-1)(n-2)$ 通りある.

(1) A が k の札を取り出してかつ勝者となるのは, A が k の札を, B, C が 1 から $k-1$ までの札のうちの 1 枚ずつを取り出す場合で, その取り出し方は

$$1 \cdot {}_{k-1}P_2 = (k-1)(k-2) \text{ 通り} \dots (\text{テ})$$

ある. よってこの確率は

$$\frac{(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)} \cdot \dots (\text{ト})$$

(2) B が, k の札を取り出してかつ勝者となる確率, C が k の札を取り出してかつ勝者となる確率はいずれも (1) の結果と等しいので

$$p_k = \frac{3(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)} \cdot \dots (\text{ナ})$$

$$(3) \quad E = \sum_{k=3}^n k \times p_k$$

$$= \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2)$$

ここで,

$$\sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2)$$

$$= \sum_{k=1}^n k(k-1)(k-2) - 1 \cdot 0 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot 0$$

$$= \sum_{k=1}^n (k^3 - 3k^2 + 2k)$$

$$= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - 3 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$+ 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1) - 2(2n+1) + 4\}$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n^2 - 3n + 2)$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n-1)(n-2)$$

であるから

$$E = \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \cdot \frac{1}{4}n(n+1)(n-1)(n-2)$$

$$= \frac{3}{4}(n+1) \cdot \dots (\text{ニ})$$

IV

(1) l は線分 AP の中点

$$M(2\cos\theta, 2\sin\theta - 1)$$

を通り,

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 4\cos\theta \\ 4\sin\theta + 2 \end{pmatrix}$$

に垂直であるから,

l 上の点 $X(x, y)$ の満たすべき条件は

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{MX} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4\cos\theta \\ 4\sin\theta + 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 2\cos\theta \\ y - (2\sin\theta - 1) \end{pmatrix} = 0$$

$$4\cos\theta(x - 2\cos\theta) + (4\sin\theta + 2)\{y - (2\sin\theta - 1)\} = 0$$

これを整理して, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ に注意して,

l の方程式は

$$2\cos\theta \cdot x + (2\sin\theta + 1)y - 3 = 0 \cdot \dots (\text{ヌ}) \dots \textcircled{1}$$

(2) $(x, y) = (0, 0)$ のとき, ① は $-3 = 0$ となり, これを満たす実数 θ は存在しないので, 条件を満たす.

以下, $(x, y) \neq (0, 0)$ として考える.

$$p = \cos\theta, \quad q = \sin\theta \text{ とおくと } p^2 + q^2 = 1 \quad \dots \textcircled{2} \text{ であり,}$$

① は

$$2px + (2q + 1)y - 3 = 0$$

すなわち

$$2x \cdot p + 2y \cdot q + y - 3 = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

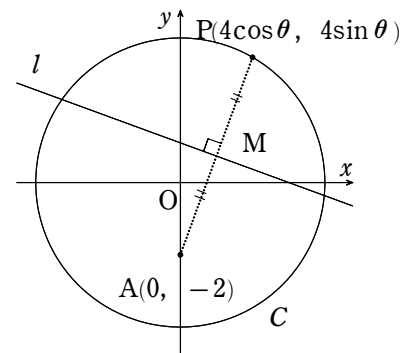
と変形できる. よって

「① を満たす実数 θ が存在しない」

$\Leftrightarrow$ 「② かつ ③ を満たす実数 p, q が存在しない」

$\Leftrightarrow$ 「 pq 平面での円 ② と直線 ③ が共有点を持たない」

$\Leftrightarrow$ 「(② の中心 $(0, 0)$ と ③ の距離) $>$ (② の半径)」



$$\Leftrightarrow \frac{|2x \cdot 0 + 2y \cdot 0 + y - 3|}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2}} > 1$$

$$\Leftrightarrow (y-3)^2 > 4(x^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 3y^2 + 6y - 9 < 0$$

$(x, y) = (0, 0)$ もこの不等式を満たすので、求める必要十分条件は

$$4x^2 + 3y^2 + 6y - 9 < 0. \dots(\text{ネ}) \dots \textcircled{4}$$

(3) P が C を一周するとき、 l が通過しない領域に属する点 (x, y) の満たすべき条件は $\textcircled{4}$ にほかならない.

$$\textcircled{4} \Leftrightarrow 4x^2 + 3(y+1)^2 < 12$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{4} < 1$$

から、 l の通過しない領域は、楕円 $\frac{x^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$

の内部である. 半長軸, 半短軸の長さがそれぞれ $2, \sqrt{3}$ より、この楕円の面積は

$$2\sqrt{3}\pi. \dots(\text{ノ})$$

参考 一般に、半長軸, 半短軸の長さがそれぞれ a, b である楕円の面積 S は

$$S = \pi ab$$

であることが以下の様に示される.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

より、楕円の対称性から

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= \frac{4b}{a} \cdot \frac{1}{4} \pi \cdot a^2 = \pi ab. \end{aligned}$$