1

問 1 $x=1-\sqrt{2}$ より

$$x-\frac{1}{x}=1-\sqrt{2}-\frac{1}{1-\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=2$$

であり

$$x^4-x^3+x^2-x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}$$

$$=x^4+\frac{1}{x^4}-\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x-\frac{1}{x}\right)+1$$

ここで,

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=2^2+2=6.$$

$$x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)=2^3+3\cdot 2=14$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=(x^2)^2+\frac{1}{(x^2)^2}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=6^2-2=34$$

であるから,

(与式)$=34-14+6-2+1=25.$ $\cdots\boxed{1}\boxed{2}$

問 2　2 次方程式 $x^2+ax+b=0\cdots(*)$ の 2 つの解を α, β とおくと, 解と係数の関係により

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$.　　　$\cdots\cdots\cdots$①

一方, 条件より, 2 次方程式 $x^2-(a+b)x-ab=0$ の 2 解は $\alpha+3$, $\beta+3$ であるから, 解と係数の関係により

$(\alpha+3)+(\beta+3)=a+b$, $(\alpha+3)(\beta+3)=-ab$

すなわち

$\alpha+\beta=a+b-6$, $\alpha\beta+3(\alpha+\beta)+9=-ab$. $\cdots\cdots$②

① を ② に代入して

$-a=a+b-6$, $b-3a+9=-ab$

すなわち

$b=-2a+6\cdots$③, $b(a+1)-3a+9=0\cdots$④

③ を ④ に代入して

$(-2a+6)(a+1)-3a+9=0$

$2a^2-a-15=0$

$(2a+5)(a-3)=0$　　$a=3,\ -\dfrac{5}{2}$

それぞれ ③ に代入して

$(a,\ b)=(3,\ 0)$, $\cdots\boxed{3}$, $\boxed{4}$

または

$(a,\ b)=\left(-\dfrac{5}{2},\ 11\right)$. $\cdots\boxed{5}\boxed{6}$, $\boxed{7}\boxed{8}$

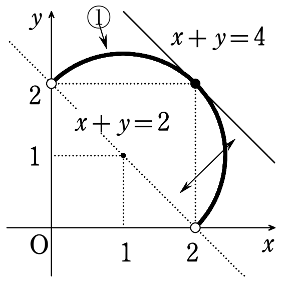
また, $(*)$ が実数解を持つ, すなわち判別式 $a^2-4b>0$ となる組は $(a,\ b)=(3,\ 0)$ であり, そのときの $(*)$ $x^2+3x=0$　を解いて, 実数解は

$x=0,\ -3\cdots\boxed{9}$, $\boxed{10}$

問 3　$x^2+y^2-2x-2y=0$

より　$(x-1)^2+(y-1)^2=2\cdots$①

であるから, これと $x>0$, $y>0$ より, 点 $(x,\ y)$ は右図の半円 ① 上を動く. 図から, この半円と直線 $x+y=k$ が共有点を持つような定数 k の範囲が $2<k\leqq 4$



であるから, $x+y$ の取りうる値の範囲は

$2<x+y\leqq 4$

すなわち　$\log_2 2<\log_2(x+y)\leqq\log_2 4$

なので　　$1<M\leqq 2$. $\cdots\boxed{11}$, $\boxed{12}$

問 4 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{8x^2+5x-3}+ax)=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{8+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}+a\right)$

であり, $x\to\infty$ のとき, この極限値が存在するためには

$$\sqrt{8+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}+a\to 0$$

すなわち

$\sqrt{8}+a=0$　つまり　$a=-2\sqrt{2}$

であることが必要である (そうでなければ与えられた極限は, 正もしくは負の無限大となってしまう).

この条件の下で

$$(\text{与式})=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{8x^2+5x-3}-2\sqrt{2}\,x)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{8x^2+5x-3})^2-(2\sqrt{2}\,x)^2}{\sqrt{8x^2+5x-3}+2\sqrt{2}\,x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5x-3}{\sqrt{8x^2+5x-3}+2\sqrt{2}\,x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\dfrac{3}{x}}{\sqrt{8+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2}}+2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{5}{4\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{8}$$

となり, 確かに極限値が存在する. よって

$a=-2\sqrt{2}$, $\cdots\boxed{13}\boxed{14}$

であり, 極限値は

$\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$. $\cdots\boxed{15}\boxed{16}\boxed{17}$

2

問 1 一般に, 成分ベクトル $(a,\ b)$ は反時計回りに $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転すると $(-b,\ a)$ になることに留意して考えると

$\overrightarrow{A_0A_1}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $\cdots\boxed{18}\boxed{19}$

$\overrightarrow{A_1A_2}=\dfrac{1}{2}(-\sin\theta,\ \cos\theta)$, $\cdots\boxed{20}\boxed{21}$

$\overrightarrow{A_2A_3}=\dfrac{1}{4}(-\cos\theta,\ -\sin\theta)$, $\cdots\boxed{22}\boxed{23}$

$\overrightarrow{A_3A_4}=\dfrac{1}{8}(\sin\theta,\ -\cos\theta)$. $\cdots\boxed{24}\boxed{25}$

問 2　問 1 の結果により

$$\overrightarrow{A_0A_4}=\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_4A_5}$$

$$=(\cos\theta,\ \sin\theta)+\frac{1}{2}(-\sin\theta,\ \cos\theta)$$

$$+\frac{1}{4}(-\cos\theta,\ -\sin\theta)+\frac{1}{8}(\sin\theta,\ -\cos\theta)$$

$$=\frac{3}{8}(2\cos\theta-\sin\theta,\ 2\sin\theta+\cos\theta)$$

であり, $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ として

$$\overrightarrow{A_{4k}A_{4k+1}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{4k}\overrightarrow{A_0A_1}=\left(\frac{1}{16}\right)^k\overrightarrow{A_0A_1},$$

$$\overrightarrow{A_{4k+1}A_{4k+2}}=\left(\frac{1}{16}\right)^k\overrightarrow{A_1A_2},\ \overrightarrow{A_{4k+2}A_{4k+3}}=\left(\frac{1}{16}\right)^k\overrightarrow{A_2A_3}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_{4k+3}\mathrm{A}_{4k+4}}=\left(\frac{1}{16}\right)^k\overrightarrow{\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4}$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_{4k}\mathrm{A}_{4k+4}}=\left(\frac{1}{16}\right)^k\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_4}$$

となる．ゆえに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_{4n}}&=\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_4}+\overrightarrow{\mathrm{A}_4\mathrm{A}_8}+\overrightarrow{\mathrm{A}_8\mathrm{A}_{12}}+\cdots+\overrightarrow{\mathrm{A}_{4n-4}\mathrm{A}_{4n}}\\&=\left\{1+\frac{1}{16}+\left(\frac{1}{16}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}\right\}\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_4}\\&=1\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{16}\right)^n}{1-\frac{1}{16}}\cdot\frac{3}{8}(2\cos\theta-\sin\theta,\ 2\sin\theta+\cos\theta)\\&=\frac{2}{5}\left(1-\frac{1}{4^{2n}}\right)(2\cos\theta-\sin\theta,\ \cos\theta+2\sin\theta)\end{aligned}$$

$\cdots\boxed{26}\sim\boxed{32}$

3

問 1 $y=\cos^2\theta\cdot\tan\frac{\theta}{2}$ より

$$\frac{dy}{d\theta}=2\cos\theta(-\sin\theta)\cdot\tan\frac{\theta}{2}+\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{1}{2}$$

ここで

$$\begin{aligned}\sin\theta\tan\frac{\theta}{2}&=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\\&=2\sin^2\frac{\theta}{2}=1-\cos\theta\ \cdots\cdots①\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta}&=\frac{-4\cos\theta(1-\cos\theta)\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\\&=\frac{-2\cos\theta(1-\cos\theta)\cdot(1+\cos\theta)+\cos^2\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\\&=\frac{\cos\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}(2\cos^2\theta+\cos\theta-2).\ \cdots\boxed{33}\sim\boxed{35}\end{aligned}$$

問 2 $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ より $0\leqq\cos\theta\leqq1$ の範囲で

$$2\cos^2\theta+\cos\theta-2=0$$

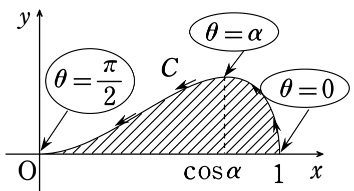
となるとき $\cos\theta=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ であり，これを満たす θ が $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ でただ１つ存在する．これを α とおくと，y の増減は右のようになる．よって，y が最大になるのは $\theta=\alpha$ すなわち

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	0
y	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$$\cos\theta=\cos\alpha=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\ \cdots\boxed{36}\sim\boxed{39}$$

のとなる θ のときである．

問 3 $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ において，$x=\cos\theta$ より $\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\leqq0$ であるから，C と x 軸の上下関係は図のようになる．ゆえに求める面積 S は



$$S=\int_0^1 y\,dx$$

ここで，$dx=-\sin\theta\,d\theta$ であり，右の区間の対応により

x	$0\to1$
θ	$\frac{\pi}{2}\to0$

$$\begin{aligned}S&=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\cos^2\theta\tan\frac{\theta}{2}(-\sin\theta\,d\theta)\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta\tan\frac{\theta}{2}\,d\theta\end{aligned}$$

さらにここで

$$\begin{aligned}&\cos^2\theta\sin\theta\tan\frac{\theta}{2}\\&=\cos^2\theta(1-\cos\theta)\quad(\because①)\\&=\cos^2\theta-\cos^3\theta\\&=\frac{1+\cos2\theta}{2}-(1-\sin^2\theta)\cos\theta\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{1+\cos2\theta}{2}-(\cos\theta-\sin^2\theta\cos\theta)\right\}d\theta\\&=\left[\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right)-\left(\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\left(1-\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}.\ \cdots\boxed{40}\sim\boxed{42}\end{aligned}$$

4

問 1 同じ色の玉であっても別々のものとして区別して考えると，A，B の 2 人の玉の取り出し方は全部で $7^2=49$ 通りあり，これらは同様に確からしい．そのうち，A が勝つような取り出し方は，

赤玉を取り出して勝つ場合は $2x$ 通り，
白玉を取り出して勝つ場合は $3y$ 通り，
黄玉を取り出して勝つ場合は $2z$ 通り

あるので，A が勝つ確率は

$$\frac{2x+3y+2z}{49}.\ \cdots\boxed{43}\sim\boxed{47}$$

問 2 条件より $\frac{2x+3y+2z}{49}\geqq\frac{5}{14}$ であるとき

$$2(2x+3y+2z)\geqq35.\ \cdots①$$

ここで，$x+y+z=7$ すなわち $z=7-x-y\cdots②$ を ① に代入すると，

$$2\{2x+3y+2(7-x-y)\}\geqq35 \text{ より } y\geqq\frac{7}{2}\ \cdots③$$

である．このとき，A の得点の期待値 E は

$$\begin{aligned}E&=3\cdot\frac{2x}{49}+1\cdot\frac{3y}{49}+2\cdot\frac{2z}{49}\\&=\frac{6x+3y+4z}{49}\\&=\frac{6x+3y+4(7-x-y)}{49}\ (\because ② \text{ より})\\&=\frac{28+2x-y}{49}\end{aligned}$$

となり，E が最大となるのは，x が最大かつ，y が最小のときであり，③ の範囲で考えると，これは

$$x=3,\quad y=4,\quad z=0 \cdots \boxed{48}\sim\boxed{50}$$

のときである．よって，E の最大値は

$$\frac{28+2\cdot3-4}{49}=\frac{30}{49}. \quad \cdots \boxed{51}\sim\boxed{54}$$