

## ①(1) ; 場合の数

### ○ 原則

ある条件を満たす場合の数を求める問題

とある条件を満たす場合の数を求める問題では解き方が2パターンある。

1 その条件を満たす場合の数を直接求めるやり方

2 その条件にそぐわない場合の数を求め条件がない場合の数から引くというやり方

(条件がない場合の数=条件を満たす場合の数+条件にそぐわない場合の数)

2つのやり方のどちらでやるかで計算量も難易度も変わるので、問題に合わせて見極めることが鍵。

### ○ 解答の方針

あ ; 条件は偶数のカードが2枚以上となることである。条件を満たすのは偶数3枚か偶数2枚奇数1枚を選ぶとき。一方条件を満たさない時は奇数3枚か奇数2枚偶数1枚を選ぶときである。このように分けると、今回は条件を満たす場合と満たさない場合で計算する量も難易度もほとんど同じだと考えられるので原則の1でも2でもどちらでもよい。条件を満たす場合の数は偶数3枚と偶数2枚奇数1枚を選ぶときをそれぞれ求め合わせれば良い。

## (2)方程式

### ○ 原則

二次方程式の解

$A=m+\sqrt{n}$ として ( $m$  が有理数で $\sqrt{n}$ は無理数とする)

係数が整数である二次方程式の解において、一つの解が  $A$  であるとき  $m-\sqrt{n}$ もその二次方程式の解となる。以下これが成り立つことを確認する。

$x^2+ax+b=0$ . ( $a$  と  $b$  は任意の有理数) ①

もう一方の解を  $B$  とし、

①において解と係数の関係を考えて、

$m+\sqrt{n}+B=a$  となり  $\sqrt{n}+B=a-m$  となり  $a-m$  は有理数であるから  $\sqrt{n}+B$  も有理数とならなければならない。よって  $B$  は  $-\sqrt{n}$  と有理数で表すことができる。有理数を  $m'$  とおくと  $B=m'-\sqrt{n}$  と表せる。

$(m+\sqrt{n})(m'-\sqrt{n})=b$   $mm'-n-b=\sqrt{n}(m'-m)$ となる。  $mm'-n-b$  は有理数である。有理数×無理数=無理数であるから $\sqrt{n}(m'-m)$ が有理数になるためには  $m=m'$  でなければならない。

よってもう一つの解  $B=m-\sqrt{n}$ となる。また  $a=2m$   $b=m^2-n$  であることもわかる。

### ○ 解答の方針

う、え；原則における二次方程式の解の関係を覚えておいたほうがよく、覚えておけば早い。

お、か； $(2+\sqrt{5})^n$ を展開するとどういう式になるか想像しづらいであろう。しかし、 $(2+\sqrt{5})^n$ の形をみて二項定理を思い出してほしい。

$$(2+\sqrt{5})^n = \sum_{k=1}^n nCk (2)^k (\sqrt{5})^{n-k}$$

このように展開すると原則が成り立つには

$\sum_{k=1}^n nCk (2)^k (-\sqrt{5})^{n-k}$ がもう一方の解になると気づきやすい。

$\sum_{k=1}^n nCk (2)^k (-\sqrt{5})^{n-k} = B^n$ とわかる。 $B^n$ がもう一つの解と分かれば う、え同様、解と係数の関係を利用すればよい。

## (3)定積分

### ○ 原則

文字式が多い定積分

xにおいて定積分すると x の部分は部分が定数となる。

文字式が増えても混乱しないように注意する。

$$\text{例} \int_1^2 x^2 + xyz + z + y \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}yz + zx + yx \right]_1^2 = \frac{3}{2}yz + y + z + \frac{7}{3}$$

### ○ 解答の方針

関数 A(m)の定積分を求め、その式を平方完成させ最小を求める。

## ② 確率漸化式

### ○ 原則

1、漸化式の定石

確率の問題で操作を繰り返す問題は漸化式を作ることが定石。

このような問題では問題の設問に合わせて漸化式が立てられること  
とその漸化式を解けるかの2点が大切である。

漸化式から答えが出たら  $n=1$  など具体的な数を入れて代入して答えがあつて  
るか確かめてみる。

2、等比数列の和・・・(3)に利用  
初項が  $a$  等比が  $r$  の数列において

$$\sum_{k=1}^n ar^{k-1} = a \frac{r^n - 1}{r - 1} \text{が成り立つ}$$

### ○ 解答の方針

(1)まず 1 にいる確率とはとはずっと 1 にいる確率であるということを問題から  
理解する。すると  $p_n = \frac{3}{4} p_{n-1}$  という漸化式が立てられるので、

$$p_1 = \frac{3}{4} \text{より } p_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \text{とわかる。}$$

まず  $q_n$  における漸化式を立てることを考える。

ここで点 3 に置かれている確率を  $1 - p_n - q_n$  とおき、置く文字式をできるだけ少な  
くすることが漸化式を立てる上での鍵である。

漸化式がたったら特性方程式を作り漸化式を解けばよい。

(2) 2 の位置に置かれている確率の漸化式は (1) と同じで一回目の操作の後 2  
の位置にある確率の違いだけである。

(3)  $(3-1)r_2$  をまず求めて、問題の状況を理解し、それから漸化式を立てる。

(3-2) 2点 C,D がどちらも 2 の位置に置かれていない確率は C がずっと点 1  
に留まる確率と C が点 3 にいて D が点 1 か 3 にいる確率の合計である。

それぞれの確率を求め合計すれば良い。

### ③ 座標 曲線

#### ○ 原則

1、接線について・・・(1)に利用

接線は一次方程式であるから、傾きが  $m$  である一点  $(X,Y)$  を通るとき  
 $y = m(x - X) + Y$  と表せる。

2、法線の求め方・・・(2)について

$y=f(x)$ のグラフに対して点  $Q(a, f(a))$ における法線は接線に対して垂直である

ので  $y = -\frac{1}{f'(a)}(x-a) + f(a)$ で表せる。

3、傾きと角度の関係・・・(3)について

直線の傾きが  $m$  とする。

$x$  軸から直線まで左向きに測ったの角度  $\theta$  とすると  $m = \tan \theta$ と表せる。

### ○解答の方針

(1)接線の傾きを知りたいので傾きを未知数  $m$  とおき、 $y=m(x-X)+Y$  と置く。二次方程式の接線は接点以外交点を持たないので、連立した式は重解を持つ。よって判別式  $D=0$  となる。 $D=0$  となる時の  $m$  を求めればよい。

(2)法線の2つの式を連立させて  $x, y$  をそれぞれ求める。計算を複雑化させないために  $m_1$  と  $m_2$  と置いたままやるほうがよい。

(3) i 2直線が直交するとき2直線の傾きの積は  $-1$  である事を使えば簡単にできる。

ii 原則2に従って傾きを  $\tan$  の式で表す。これを利用して交角  $\alpha$  と傾きの式で等式を出す。

(4) (3)の ii の軌跡に  $Y=0$  を代入すれば良い。

## ④極値

### ○原則

1、内接円について・・・(1)について

内接円の中心から接点に下ろした直線は接線と垂直に交わる

内接円の半径と三角形の辺の長さを使って三角形の面積を求められる

2、置き換えの注意点・・・(1)について

式が複雑な時、置きかえをすることにより、計算を楽にすることができる。

置き換えて増減を調べる時、一対一対応をしているか注意する。

$$\sin x = t \quad 0 < x < \pi$$

ある  $t$  に対して  $x$  が一つに対応するという事

$\sin x = t \quad 0 < x < 2\pi$  の時は  $t$  が  $\frac{1}{2}$  のとき  $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$  と  $x$  と  $t$  が一対一ではないの

で、置きかえたことにならない。

3、増減について・・・(3)について

f(x)の増減を調べるにはf'(x)の正負の変化のみに注目すれば良い

4、覚えておく極限值・・・(4)について

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

### ○ 解答の方針

(1)内接円の半径と△ABCの辺の長さを使って△ABCの面積を求めることができる。

原則の仕方に従って置換して挙げると計算が楽である。 $\sin \theta = s$  で  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  で一対一対応しているので原則を満たす。

置き換えて増減を調べる。

(2)㉒の問題の原則より、操作を繰り返すという問題文から漸化式を立てられそうと発想する。

問題を図示してみて漸化式を立てる。すると等比数列だとわかるのであとは計算するのみ。

(3) $\frac{d}{d\theta} \log R_n$ をまず計算してみて、 $g_n$ を左辺と右辺を比較して調べる。 $\log R_n$ の増

減は $R_n$ の増減と同じである。増減を調べるには $\frac{d}{d\theta} \log R_n$ の正負の変化のみに注目すれば良い。 $\log R_n$ の増減は $\sin \theta \times \cos \theta$ は  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  で常に正であるから正負の変化は $g_n(x)$ の正負の変化に依存する。 $g_n(x)$ の正負の変化を調べ、 $\log$ が最大となる $\sin \theta_n$ を求める。

(4) $n \sin \theta_n$ を計算し  $n \rightarrow \infty$ に飛ばせばよい。

$S_n = \pi(R_n(\theta))^2$ であるので、 $n^2 \pi(R_n(\theta))^2$ を計算して  $n \rightarrow \infty$ に飛ばせばよい。途

中の計算位置いて $\left(\frac{1-\sin \theta_n}{1+\sin \theta_n}\right)^{n-1}$ を単純に  $n \rightarrow \infty$ に飛ばしても定まらない。工夫し

なければならない

$\left(\frac{\sin \theta_n}{1+\sin \theta_n}\right)^{n-1}$ の極限を取るときに  $n-1$ 乗が複雑にしているから、 $\log$ をとって

$\log$ の前に  $n-1$ がくると計算しやすいのではないかと気づきことが大切。

あとは計算を進めていけば良い。