

①

(A)小問集合

○原則

1、正弦定理、余弦定理・・・(1)に利用

三角形において、三角形の2角と1辺がわかっているとき、正弦定理を使い、1角と2辺がわかっているとき余弦定理を使う。

2、実数係数と複素数・・・(3)に利用

実数係数の方程式の1つの解が複素数のとき、共役の複素数を解に持つ。

3 3次方程式における解と係数の関係・・・(3)に利用

3次の方程式の解を α 、 β 、 Γ とすると

$$X^3 + aX^2 + bX + c = 0 \text{ において } a = -(\alpha + \beta + \Gamma), b = \alpha\beta + \beta\Gamma + \Gamma\alpha$$

$$c = -\alpha\beta\Gamma$$

○解答の方針

(1)原則1に従って、2角と1辺がわかっているから、正弦定理を用いてみる。
図を描けば簡単にできる。

(2)集合の捉え方をして2から3-(2だけ+3だけ)をすれば2も3も出る確率が出る。
Nにおいても同様に考えれば良い。

(3)原則2、3に従い共役の複素数を求める。また、解と係数の関係を使う。

α^{10} を求めるとき計算しやすいものがでるまで α 、 α^2 、 α^3 ・・・と求めれば良い
と考える。

(β) 証明問題

○原則

必要十分条件について

pならばq (記号で表わせば、 $p \rightarrow q$)

が成り立つとき、「pはqであるための十分条件」、

「qはpであるための必要条件」といいます。

$p \rightarrow q$ と $p \leftarrow q$ の両方とも成り立つとき、

「pはqであるための必要十分条件」

「qはpであるための必要十分条件」

といいます。

○解答の方針

- ①全ての奇数がAの要素であるということは $2n+1$ を $a^2 - b^2$ で表せるということである。 a, b に n の式を代入してみて $2n+1$ が出るのを調べる。
- ②必要条件十分条件についてそれぞれ考える。①と同様に、 a, b に k の式を入れて $4k$ を求める。 $m = a^2 - b^2$ とおいたとき、 m が4倍数となることを証明すればよい。

②座標

○原則

ある点 (a, b) から楕円に引いた接線が直交する・・・(2)に利用
このような問題はよくあるが接線の傾きを m_1, m_2 と置き、 $y = m_1(x-a) + b, y = m_2(x-a) + b$ と考えて楕円の式と連立させ、重解となること、 $m_1 \times m_2 = -1$ を使う。

○解答の方針

- (1)原則の楕円の定義 (2 定点からの距離の和が一定値である点が描く図形を楕円)を知っていれば楕円の式になると計算せずになんともなくわかる。
点Rを点P, Qの変数で置ければ、 $PQ=1$ を使って変数を消去することで軌跡を求めることができる。
- (2) i $x=a$ のとき直交するのは $y=b$ である。Cの座標軸に平行な接線を t で表し、 $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}, y = \frac{\sqrt{2}}{3}$ と考え合わせれば良い。
- ii 原則に沿って進めるが、接線の時、楕円と一点で交わるから、 x の方程式は重解となる。

③図形 極限

○原則

- 1、平行四辺形・・・(1)に利用
平行四辺形の定義
二組の対辺がそれぞれ平行な四角形を平行四辺形という
平行四辺形になるための条件
- ①定理 2組の対辺がそれぞれ平行である。

- ②定理 2組の対辺がそれぞれ等しい。
- ③定理 2組の対角がそれぞれ等しい。
- ④定理 対角線がそれぞれの中点で交わる。
- ⑤定理 1組の対辺が平行でその長さが等しい。

2、ひし形。・・・(1)に利用

ひし形の定義

4辺が等しい

ひし形になるための条件

平行四辺形で ①定理 対角線が垂直に交わる②定理 隣り合う辺の長さが等しい

3、区分求積法の公式・・・(4)に利用

区分求積法の公式 ; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$

○解答の方針

(1) i ⑤の定理を使えば

4点在同一平面上とわかる。

ii ひし形の性質を使い対角線が直交する

(2) PQRS の面積をベクトルを用いて表す。面積は $\frac{\overline{PQ} \cdot \overline{RS}}{2}$ であるから、 $|\overline{PQ}|^2 |\overline{RS}|^2$ の

最小値を考えれば良い。

(3) まず OH について考える。PQRS は平行四辺形であるから、OH が PQ と RS に垂直でなければならない。P と Q, S と R は面 OBF D に対称であるから、OH は面 OBF D と平行四辺形が交わる直線上にある。よって PQ の中点、RS の中点となる。次に OH が MN に垂直になる時を考える。

直円錐について考える。直円錐の底面は PQRS 上の H から最も遠い点である。

P、Q、R、S のそれぞれ点について H からの距離を求め比較する。

あとは直円錐を計算すれば良い。

(4) 区分求積法は Σ に注目して、極値を求めるときに公式の形になることに気づくことができるかが鍵である。