1.

(1)

$y = 2^{\sin x}$ のとき

$y' = \boxed{2^{\sin x} \cdot (\log 2) \cdot \cos x}$

(2)

$y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ のとき

$$y' = \frac{(e^x+e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$= \boxed{\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}}$$

(3)

$y = x^3 \sqrt{1+x^2}$ $(x > 0)$ のとき

$$y' = 3x^2 \cdot \sqrt{1+x^2} + x^3 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{3x^2(1+x^2) + x^4}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{x^2(3+3x^2+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \boxed{\frac{x^2(4x^2+3)}{\sqrt{1+x^2}}}$$

(4)

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2\frac{x}{2}}} \times \frac{\cancel{2}\cos\frac{x}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\right)}{\cancel{2}\sqrt{1+\cos^2\frac{x}{2}}} \quad \text{より}$$

$$y' = \frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1+\cos^2\frac{x}{2}} = -\frac{\sin x}{4\left(1+\cos^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$= -\frac{\sin x}{4\left(1+\frac{1+\cos x}{2}\right)}$$

$$= -\frac{\sin x}{4+2+2\cos x}$$

$$= -\frac{\sin x}{6+2\cos x}$$

(5)

$$y = \frac{\log(\log x)}{\log x} \quad \text{より}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{\cancel{\log x}} \times \frac{1}{x} \times \cancel{\log x} - \log(\log x) \times \frac{1}{x}}{(\log x)^2}$$

$$y' = \frac{1-\log(\log x)}{x(\log x)^2}$$

(6)

$$y = \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)^2} \quad \text{より}$$

$$y' = \frac{(x-2+x-1)(x+1)^2 - (x-1)(x-2)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$y' = \frac{(2x-3)(x+1) - 2(x-1)(x-2)}{(x+1)^3}$$

$$y' = \frac{\cancel{2x^2} - x - 3 \cancel{-2x^2} + 6x - 4}{(x+1)^3}$$

$$\boxed{y' = \frac{5x-7}{(x+1)^3}}$$

(7)

$$y = \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}} \times \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}} \times \frac{2\sqrt{1+x^2}+2x}{2\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}} \times \sqrt{1+x^2}}$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{1+x^2}}}$$

(8)

$x>0$ のとき　$y = x^{\frac{1}{x}}$

両辺正より　自然対数をとると

$$\log y = \frac{1}{x}\log x$$

両辺 x で微分して

$$\frac{1}{y}y' = -\frac{1}{x^2}\log x + \frac{1}{x^2}$$

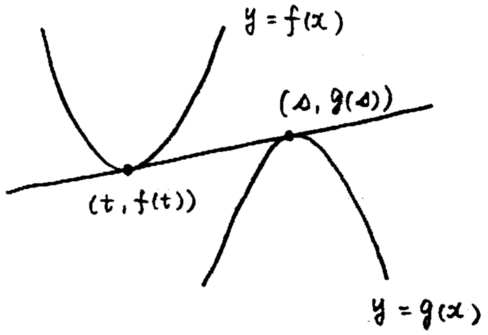
よって　$y' = y \times \frac{1}{x^2}(1-\log x)$

$$\boxed{y' = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\log x)}$$

2.

(1)

$$\begin{cases} f(x) = 9x^2+5x+3 \\ g(x) = -3x^2+x+\frac{5}{3} \\ h(x) = 5\log(x-a)-2 \end{cases}$$ とおくと $$\begin{cases} f'(x) = 18x+5 \\ g'(x) = -6x+1 \\ h'(x) = \dfrac{5}{x-a} \end{cases}$$ である.



$y=f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線は

$y = f'(t)(x-t)+f(t)$ より

$y = (18t+5)(x-t)+9t^2+5t+3$

$\boxed{y = (18t+5)x-9t^2+3}$ ―①

また $y=g(s)$ 上の点 $(s, g(s))$ における接線は

$y = g'(s)(x-s)+g(s)$ より

$y = (-6s+1)(x-s)+(-3s^2+s+\frac{5}{3})$

$\boxed{y = (-6s+1)x+3s^2+\frac{5}{3}}$ ―②

①②が共通な接線となるとき $\begin{cases} 18t+5 = -6s+1 & \text{―③} \\ -9t^2+3 = 3s^2+\frac{5}{3} & \text{―④} \end{cases}$ がなりたつから

③より $18t+4 = -6s$

$s = -3t-\frac{2}{3}$ ―⑤

⑤を④に代入して $-9t^2+3 = 3(-3t-\frac{2}{3})^2+\frac{5}{3}$

$-9t^2+3 = 3(9t^2+4t+\frac{4}{9})+\frac{5}{3}$

$-9t^2+\cancel{3} = 27t^2+12t+\cancel{\frac{9}{3}}$

$36t^2+12t = 0$

$t^2+\frac{1}{3}t = 0$

$t(t+\frac{1}{3}) = 0$

$t = 0, -\frac{1}{3}$

$t=0$ で $s = -\frac{2}{3}$

$t=-\frac{1}{3}$ で $s = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

よって これらを①②に代入して

$(t, s) = (0, -\frac{2}{3})$ のとき $y = 5x+3$.

$(t, s) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ のとき $y = -x+2$.

ゆえに $\boxed{\text{共通接線は } y=5x+3 \text{ と } y=-x+2}$

(2) $y=f(x)$ の $(u, f(u))$ における接線は

$$y = f'(u)(x-u) + f(u) \text{ より}$$

$$y = \frac{5}{u-a}(x-u) + 5\log(u-a) - 2 \text{ から}$$

$$\boxed{y = \frac{5}{u-a}x - \frac{5u}{u-a} - 2 + 5\log(u-a)} \quad -⑥$$

i) ⑥が $y=5x+3$ となるとき

$$\begin{cases} \dfrac{5}{u-a} = 5 & -⑦ \\ -\dfrac{5u}{u-a} - 2 + 5\log(u-a) = 3 & -⑧ \end{cases}$$

がなりたてばよいので　⑦より $u-a=1$ から

⑧は $-\dfrac{5u}{1} - 2 + 5\log 1 = 3$

$$-5u - 2 = 3$$

$$-5u = 5$$

$$u = -1$$

よって $-1-a=1$ より

$$\boxed{a=-2}$$

ii) ⑥が $y=-x+2$ となるとき

$$\begin{cases} \dfrac{5}{u-a} = -1 & -⑨ \\ -\dfrac{5u}{u-a} - 2 + 5\log(u-a) = 2 & -⑩ \end{cases}$$

がなりたてばよいが，⑨より $u-a=-5$ となって

⑩の真数条件 $u-a>0$ をみたさないから不適

i) ii) より　3つの曲線に接する直線が存在するような定数 a は

$\boxed{a=-2}$ である

3.

(1) $f(x)=\cos 4x + a\cos x + b\sin x$ より

$f'(x)=-4\sin 4x - a\sin x + b\cos x$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-33$ より　$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1+\frac{1}{\sqrt{2}}a+\frac{1}{\sqrt{2}}b=-33$

よって　$a+b=-32\sqrt{2}$　—①

また $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ より　$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}a+\frac{1}{\sqrt{2}}b=0$

よって　$-a+b=0$　—②

①②より　$\boxed{a=b=-16\sqrt{2}}$

(2) $f''(x)=-16\cos 4x - a\cos x - b\sin x$ より

$f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-16\times\cos\pi+16\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}+16\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}$

$=16+16\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+16\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=48>0$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ であるから　$f(x)$ は $x=\frac{\pi}{4}$ で極小値をとる。

(3) $f'(x)=-4\sin 4x+16\sqrt{2}(\sin x-\cos x)$

$=-4\sin 4x+16\sqrt{2}\times\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

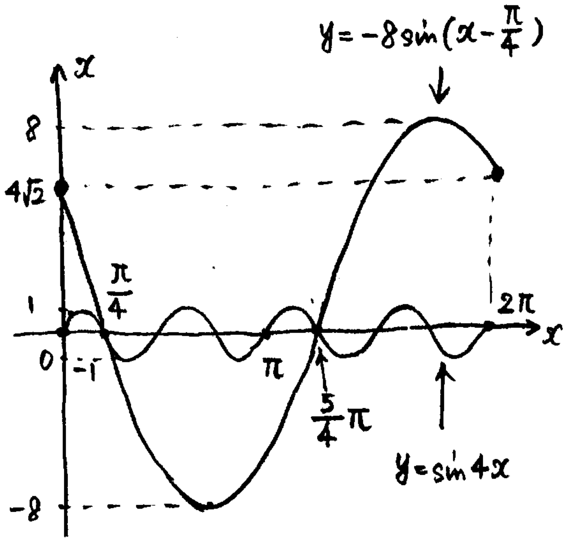
$=-4\left\{\sin 4x-8\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$

ここで $y=\sin 4x$ と $y=-8\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ の

グラフ（右図より）

$0\leqq x\leqq 2\pi$ で $f'(x)=0$ となるのは

$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$ であり.



$f''\left(\frac{5}{4}\pi\right)=-16\cos 5\pi+16\sqrt{2}\cos\frac{5}{4}\pi+16\sqrt{2}\sin\frac{5}{4}\pi$

$=16+16\sqrt{2}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+16\sqrt{2}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-16<0$ より

$f(x)$ は $x=\frac{5}{4}\pi$ で極大値をとる。

よって $f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=\cos 5\pi-16\sqrt{2}\cos\frac{5}{4}\pi-16\sqrt{2}\sin\frac{5}{4}\pi$

$=-1-16\sqrt{2}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-16\sqrt{2}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

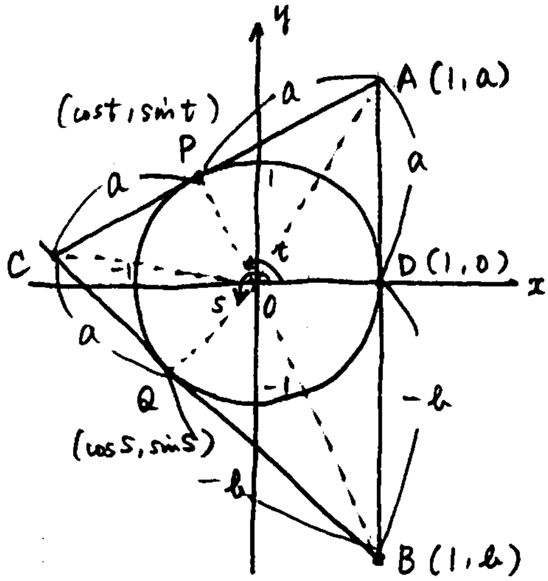
$=31$.

ゆえに

$f(x)$ の極大値は 31

（$x=\frac{5}{4}\pi$ のとき）

4.



(1) 左図のようになり，$a>0$，$b<0$ である．

$AP = a$ より

$\sqrt{(1-\cos t)^2 + (a-\sin t)^2} = a$ だから

$1 - 2\cos t + \cos^2 t + \cancel{a^2} - 2a\sin t + \sin^2 t = \cancel{a^2}$

$1 - 2\cos t - 2a\sin t + 1 = 0$

$2a\sin t = 2 - 2\cos t$

よって $\boxed{a = \dfrac{1-\cos t}{\sin t}}$

同様に $BQ = -b$ より

$\sqrt{(1-\cos s)^2 + (b-\sin s)^2} = -b$ だから

$1 - 2\cos s + \cos^2 s + \cancel{b^2} - 2b\sin s + \sin^2 s = \cancel{b^2}$

$2 - 2\cos s = 2b\sin s$ よって $\boxed{b = \dfrac{1-\cos s}{\sin s}}$ となる

(2) $O(0, 0)$，$D(1, 0)$ とすると四角形 ODAP において

$\angle ODA = \angle OPA = \dfrac{\pi}{2}$ だから $t + \angle A = \pi$ より $\boxed{\angle A = \pi - t}$

同様に $\angle DOQ + \angle B = \pi$ より

$2\pi - s + \angle B = \pi$ よって $\boxed{\angle B = s - \pi}$

また $\boxed{\angle C} = \pi - \angle A - \angle B$

$= \pi - (\pi - t) - (s - \pi) = \boxed{\pi + (t - s)}$ となる

(3) $AB = BC$ より $\angle A = \angle C$ であるので

$\pi - t = \pi + (t - s)$ より $\boxed{s = 2t}$ である

また $S = \triangle ABC = \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OAC$

$= 2\triangle OAB + \triangle OAC$

$= 4\triangle ODA + 2\triangle ODB$

$= 4 \times \dfrac{1}{2}\tan\dfrac{t}{2} + 2 \times \dfrac{1}{2}\tan\left(\dfrac{2\pi - 2t}{2}\right)$

$= 2\tan\dfrac{t}{2} + \tan(\pi - t)$

$= \boxed{2\tan\dfrac{t}{2} - \tan t}$

よって $\dfrac{dS}{dt} = 2 \times \dfrac{\frac{1}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2}} - \dfrac{1}{\cos^2 t}$

$$= \frac{\cos^2 t - \cos^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} \cos^2 t}$$

$$= \frac{(\cos t + \cos \frac{t}{2})(\cos t - \cos \frac{t}{2})}{\cos^2 t \cos^2 \frac{t}{2}}$$

$$= \frac{2\cos \frac{t+\frac{t}{2}}{2} \cos \frac{t-\frac{t}{2}}{2} \times (-2)\sin \frac{t+\frac{t}{2}}{2} \sin \frac{t-\frac{t}{2}}{2}}{\cos^2 t \cos^2 \frac{t}{2}}$$

$$= -4 \times \frac{\cos \frac{3}{4}t \cos \frac{t}{4} \sin \frac{3}{4}t \sin \frac{t}{4}}{\cos^2 t \cos^2 \frac{t}{2}}$$ となる。

ここで $\frac{\pi}{2} < t < \frac{3}{4}\pi$ より $\frac{3}{8}\pi < \frac{3}{4}t < \frac{9}{16}\pi$

$\frac{\pi}{8} < \frac{t}{4} < \frac{3}{16}\pi$ であるから

$\cos \frac{t}{4}, \sin \frac{3}{4}t, \sin \frac{t}{4}$ の値はすべて正である

$\cos \frac{3}{4}t = 0$ をみたすのは $\frac{3}{4}t = \frac{\pi}{2}$ より

$t = \frac{2}{3}\pi$ のとき となる

t	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$
$\frac{dS}{dt}$		$-$	0	$+$	
S		↘	最小	↗	

このとき S は最小値となり

その値は

$S = 2\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{2}{3}\pi$

$= 2\sqrt{3} - (-\sqrt{3})$

$= \boxed{3\sqrt{3}}$ となる

No.

Date

5.

(1) $ax = 2\log x + \log 3 \quad (x>0)$

$a = \dfrac{2\log x + \log 3}{x}$ と変形すると

$\begin{cases} y = a \\ y = \dfrac{2\log x + \log 3}{x} \end{cases}$ との交点の個数が方程式の実数解の個数と一致する。

$f(x) = \dfrac{2\log x + \log 3}{x}$ とおくと

$f'(x) = \dfrac{2 \times \frac{1}{x} \times x - (2\log x + \log 3) \times 1}{x^2}$

$= \dfrac{2 - 2\log x - \log 3}{x^2}$

$f'(x) = 0$ とおくと $\quad 2\log x + \log 3 = 2$

$\log 3x^2 = \log e^2$

$3x^2 = e^2$

$x^2 = \dfrac{e^2}{3}$ $\quad x>0$ より $\boxed{x = \dfrac{e}{\sqrt{3}}}$

$f\left(\dfrac{e}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{2\log\frac{e}{\sqrt{3}} + \log 3}{\frac{e}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{e} \times \{2 - 2\log\sqrt{3} + \log\sqrt{3}\}$

$= \boxed{\dfrac{2\sqrt{3}}{e}}$

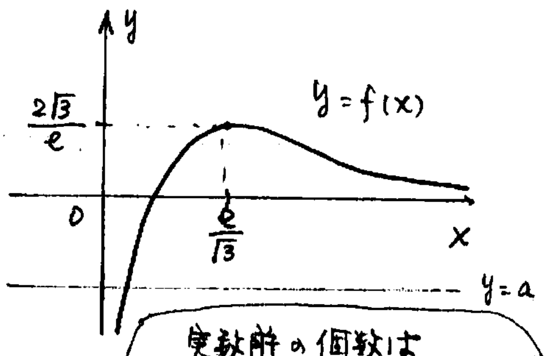
ゆえに増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{e}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{e}$ 極大	$\searrow$ 0

$\lim_{x \to +0} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \dfrac{2 \times \frac{1}{x}}{1} = 0$

よりグラフは右図



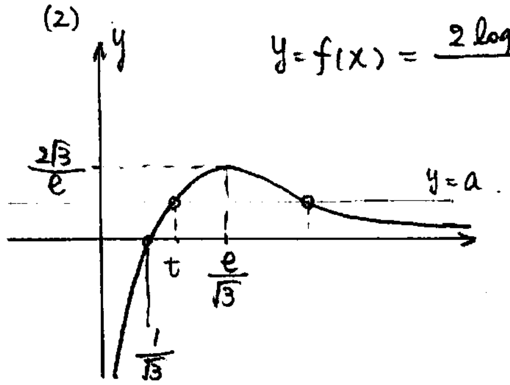
ゆえに、

実数解の個数は
$a \leqq 0$ で 1個
$0 < a < \dfrac{2\sqrt{3}}{e}$ で 2個
$a = \dfrac{2\sqrt{3}}{e}$ で 1個
$\dfrac{2\sqrt{3}}{e} < a$ でなし となる

No.

Date

(2)



$$y=f(x)=\frac{2\log x+\log 3}{x}$$

$f(x)=0$をとくと

$$2\log x=-\log 3$$

$$\log x^2=\log\frac{1}{3}$$

$$x^2=\frac{1}{3}$$

$x>0$より　$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

ゆえにグラフから、tの存在範囲は

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}<t<\frac{e}{\sqrt{3}}}$$

(3)　解が1つのときは、$0<x\leqq\frac{1}{\sqrt{3}}$となるから整数解なし

ゆえに整数解をもつときは解が2つもつときである。
このとき、解のひとつは必ず$\frac{1}{\sqrt{3}}<x<\frac{e}{\sqrt{3}}$の間にある。

よって　小さい方の整数解は　$x=1$である。

このとき　$f(1)=2\log 1+\log 3=\log 3$より
$a=\log 3$となる。

ゆえにもとの式は
$$x\log 3=2\log x+\log 3$$
$$\log 3^x=\log 3x^2$$

これをみたすのは　$x=3$であるので題意に適する

よって　$\boxed{\text{題意をみたす}a\text{は}\quad a=\log 3}$

6.

(1) $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ より $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - (\log x) \cdot 1}{x^2}$

$$= \frac{1 - \log x}{x^2}$$

よって $f'(x) = 0$ の解は $\log x = 1$ より $x = e$ であるから 増減表は下のようになる

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

ゆえに $\boxed{\begin{array}{l} 0 < x \leqq e \text{ で } f(x) \text{は単調増加} \\ e \leqq x \text{ で } f(x) \text{は単調減少} \end{array}}$ となる

(2). $e < \pi$ であるから (1)より $f(e) > f(\pi)$ がなりたつので

$$\frac{\log e}{e} > \frac{\log \pi}{\pi}$$ がなりたつから

この式を変形すると

$$\pi \log e > e \log \pi$$

$$\log e^{\pi} > \log \pi^{e}$$ もなりたつ

よって 底eは1より大きいので

$\boxed{e^{\pi} > \pi^{e}}$ がなりたつ。

No.

Date

7. $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\sin x} \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3}{2}\pi\right)$

(1) $f'(x) = \dfrac{\cos x(1+\sin x) - \sin x \cos x}{(1+\sin x)^2}$

$= \dfrac{\cos x \times (1+\sin x - \sin x)}{(1+\sin x)^2}$

$= \dfrac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	
$f(x)$		↗	$\frac{1}{2}$ 極大	↘	

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

極大値は $\frac{1}{2}$ $\left(x=\frac{\pi}{2}\text{のとき}\right)$

(2) $f''(x) = \dfrac{-\sin x(1+\sin x)^2 - \cos x \times 2(1+\sin x)\cos x}{(1+\sin x)^4}$

$= \dfrac{-\sin x(1+\sin x) - 2\cos^2 x}{(1+\sin x)^3}$

$= \dfrac{-\sin x - \sin^2 x - 2(1-\sin^2 x)}{(1+\sin x)^3}$

$= \dfrac{\sin^2 x - \sin x - 2}{(1+\sin x)^3}$

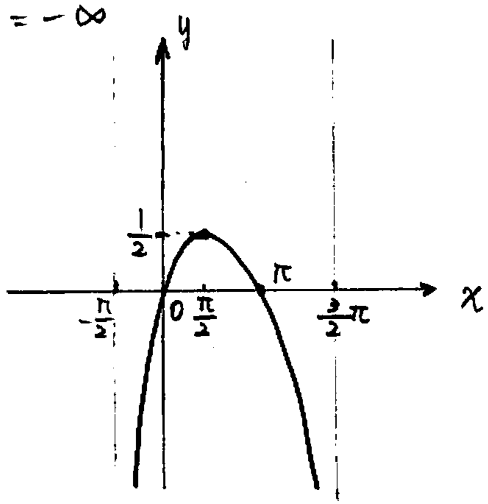
$= \dfrac{(\sin x + 1)(\sin x - 2)}{(1+\sin x)^3}$

$= \dfrac{\sin x - 2}{(1+\sin x)^2} < 0$. よって グラフは上に凸

(3) $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}+0} \frac{\sin x}{1+\sin x} = -\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to \frac{3}{2}\pi-0} f(x) = \lim_{x\to \frac{3}{2}\pi-0} \frac{\sin x}{1+\sin x} = -\infty$

(4) $y=f(x)$ のグラフは右図



8.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+2}{x+2}\,dx$

$$= \int_0^1 \frac{(x+2)(x-2)+6}{x+2}\,dx$$

1	0	2	$\underline{\lvert -2}$
	-2	4	
1	-2	$\lvert 6$	

$$= \int_0^1 \left(x-2+\frac{6}{x+2}\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}(x-2)^2 + 6\log|x+2|\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\times 1^2 + 6\log 3 - \frac{1}{2}\times 4 - 6\log 2$$

$$= \boxed{-\frac{3}{2} + 6\log\frac{3}{2}}$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x\log(x^2+1)\,dx$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)'\log(x^2+1)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\log(x^2+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\log 2 - \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\log 2 - \int_0^1 \frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\log 2 - \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\log 2 - \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log 2$$

$$= \boxed{-\frac{1}{2} + \log 2}$$

(3) $\log x = t$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$ より

$$dx = x\,dt = e^t\,dt$$

x	$1 \cdots\cdots e$
t	$0 \cdots\cdots 1$

よって $\displaystyle\int_1^e 5^{\log x}\,dx = \int_0^1 5^t\cdot e^t\,dt$

$$= \int_0^1 (5e)^t\,dt$$

$$= \left[\frac{(5e)^t}{\log 5e}\right]_0^1$$

$$= \boxed{\frac{5e-1}{\log 5 + 1}}$$

(4)

$x = \tan\theta$ とおくと　$dx = \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$,

x	$0 \cdots 1$
θ	$0 \cdots \frac{\pi}{4}$

より

$$\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan\theta+1}{(\tan^2\theta+1)^2} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\left(\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}\right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan\theta+1}{\frac{1}{\cos^4\theta}} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+1\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos\theta\sin\theta + \cos^2\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \left[-\frac{1}{4}\cos 2\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \boxed{\frac{\pi+4}{8}}$$

(5)

$$\int_0^1 xe^x\,dx = \int_0^1 x(e^x)'\,dx$$

$$= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$$

$$= 1\times e^1 - 0 - [e^x]_0^1$$

$$= e - (e^1 - e^0) = \boxed{1}$$

(6)

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} x(-\cos x)'\,dx$$

$$= [-x\cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,dx$$

$$= -\pi\times(-1) + 0 + [\sin x]_0^{\pi}$$

$$= \boxed{\pi}$$

(7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x} = I$ とおくと

$\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 x + 3} \times \frac{dx}{\cos^2 x}$ であり．$t = \tan x$ とおくと

$$dt = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

x	$0 \cdots\cdots \frac{\pi}{4}$
t	$0 \cdots\ 1$

より

$\displaystyle I = \int_0^1 \frac{dt}{t^2+3}$ となる．

ここでさらに $t = \sqrt{3}\tan\theta$ とおくと

$dt = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}\,d\theta$ ．

t	$0 \cdots\ 1$
θ	$0 \cdots\ \frac{\pi}{6}$

より

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{3(\tan^2\theta + 1)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}}{3}\,d\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{18}\pi}$$

(8)

$\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \sin x\,dx$ ← $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$ より

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$.

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{\cos(m+1)x - \cos(m-1)x\}\,dx$$

・$m \neq 1$ のとき

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+1)x}{m+1} - \frac{\sin(m-1)x}{m-1}\right]_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{1}{2} \times 0 = \boxed{0}$$

・$m = 1$ のとき

$$(与式) = \int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\pi = \boxed{\pi}$$

ゆえに

$m = 1$ のとき π
$m \geqq 2$ のとき 0

9.

(1) $I_1 = \int_2^3 \frac{(x-3)}{x}dx = \int_2^3 \left(1-\frac{3}{x}\right)dx$

$= \left[x - 3\log|x|\right]_2^3$

$= (3-2) - 3(\log 3 - \log 2)$

$= \boxed{1 - 3\log\frac{3}{2}}$

(2) $\frac{x-3}{x} = 1 - \frac{3}{x}$ より

$2 \leqq x \leqq 3$ のとき $1-\frac{3}{3} \geqq 1-\frac{3}{x} \geqq 1-\frac{3}{2}$ であるから

$0 \geqq 1-\frac{3}{x} \geqq -\frac{1}{2}$

よって $\boxed{0 \leqq \left|\frac{x-3}{x}\right| \leqq \frac{1}{2}}$ となる。 ①

$I_n = \int_2^3 \frac{(x-3)^n}{nx^n}dx = \frac{1}{n}\int_2^3 \left(\frac{x-3}{x}\right)^n dx$ であり ①より

$0 \leqq \frac{1}{n}\int_2^3 \left|\frac{x-3}{x}\right|^n dx \leqq \frac{1}{n}\int_2^3 \left(\frac{1}{2}\right)dx$ がなりたつ。

ここで $\frac{1}{n}\int_2^3 \left(\frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{n}\times\frac{1}{2}\left[x\right]_2^3 = \frac{1}{2n}$ より

$0 \leqq \frac{1}{n}\int_2^3 \left|\frac{x-3}{x}\right|^n dx \leqq \frac{1}{2n}$ がなりたつ。

ここで $n\to\infty$ のとき $\frac{1}{2n} \to 0$ より $\frac{1}{n}\int_2^3 \left|\frac{x-3}{x}\right|^n dx \to 0$ であるから

$\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ となる

(3) $\boxed{I_{n+1}} = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_2^3 \dfrac{(x-3)^{n+1}}{x^{n+1}}\,dx$

$$= \frac{1}{n+1}\int_2^3 \left(-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x^n}\right)'(x-3)^{n+1}dx$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[-\frac{1}{nx^n}(x-3)^{n+1}\right]_2^3 + \frac{1}{n(n+1)}\int_2^3 \frac{1}{x^n}\cdot(n+1)\cdot(x-3)^n\,dx$$

$$= \frac{1}{n(n+1)}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{2^n} + \int_2^3 \frac{(x-3)^n}{nx^n}\,dx$$

$$= \boxed{-\frac{1}{n(n+1)}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n + I_n}$$

(4) (3)より $\dfrac{1}{n(n+1)}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = I_n - I_{n+1}$ がなりたつので

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{n}(I_k - I_{k+1})$$

$$= (I_1 - \cancel{I_2}) + (\cancel{I_2} - \cancel{I_3}) + (\cancel{I_3} - \cancel{I_4}) + \cdots + (\cancel{I_n} - I_{n+1})$$

$= I_1 - I_{n+1}$ であるから. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_{n+1} = 0$ だから

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}(I_1 - I_{n+1})$$

$$= I_1 = \boxed{1 - 3\log\frac{3}{2}}$$

10.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$

x	$0 \cdots\cdots 1$
θ	$0 \cdots\cdots \frac{\pi}{4}$

より

$$(与式)=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta} \times \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$1 \leqq 1+x^4 \leqq 1+x^2$ がなりたつので.

$\dfrac{1}{1} \geqq \dfrac{1}{1+x^4} \geqq \dfrac{1}{1+x^2}$ がなりたつ。

よって $\displaystyle\int_0^1 1\,dx > \int_0^1 \frac{1}{1+x^4}\,dx > \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ もなりたつので

(1)より $\boxed{1 > \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^4}\,dx > \frac{\pi}{4}}$ がなりたつ.

11.

(1)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(4+\frac{k}{n}\right)^2 = \int_0^1 (4+x)^2\,dx$$

$$= \left[\frac{(x+4)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{5^3-4^3}{3}$$

$$= \frac{125-64}{3}$$

$$= \boxed{\frac{61}{3}}$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cos^2 \frac{k\pi}{4n}$$

$$= \int_0^1 \cos^2 \frac{\pi}{4}x\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1+\cos\frac{\pi}{2}x}{2}\,dx.$$

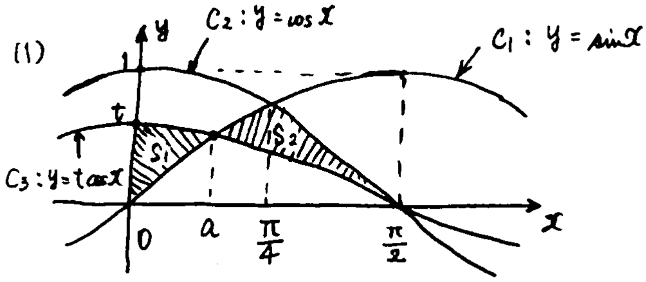
$$= \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\times\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{\pi}\times 1.$$

$$= \boxed{\frac{\pi+2}{2\pi}}$$

12.

(1)



C_1 と C_3 の $0 < x < \frac{\pi}{2}$ での

共有点の x 座標を a とすると

y 軸と，C_1，C_3 で囲まれる部分の面積 S_1 は

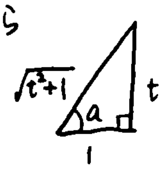
$$S_1 = \int_0^a (t\cos x - \sin x)\,dx$$

$$= \left[t\sin x + \cos x \right]_0^a$$

$$= t\sin a + \cos a - 1 \quad \text{である}$$

またここで $\sin a = t\cos a$ がなりたつので $t = \tan a$ であるから

$$\sin a = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}},\quad \cos a = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \quad \text{である}$$



よって $S_1 = \dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} - 1$

$$= \frac{t^2+1}{\sqrt{t^2+1}} - 1 = \boxed{\sqrt{t^2+1} - 1} \quad \text{となる}$$

(2) $S_2 = \displaystyle\int_a^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx - \int_a^{\frac{\pi}{2}} t\cos x\,dx$

$$= \left[-\cos x\right]_a^{\frac{\pi}{4}} + \left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \left[t\sin x\right]_a^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos a + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - t + t\sin a$$

$$= 1 - \sqrt{2} - t + \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$= 1 - \sqrt{2} - t + \sqrt{t^2+1} \quad \text{であり}$$

$S_1 = S_2$ となるとき $\cancel{\sqrt{t^2+1}} - 1 = 1 - \sqrt{2} - t + \cancel{\sqrt{t^2+1}}$ より

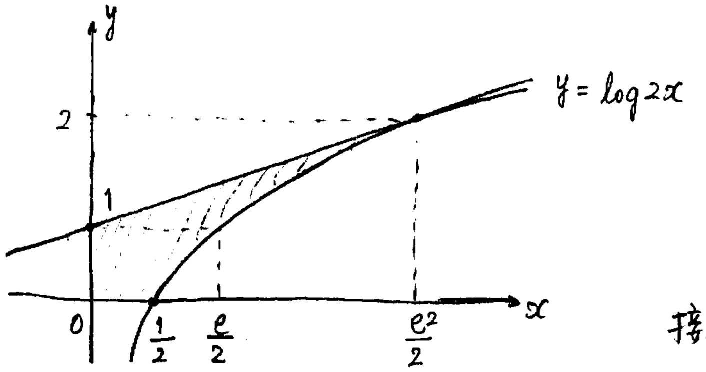
$$\boxed{t = 2 - \sqrt{2}}$$

また，このとき $S_1 = \sqrt{(2-\sqrt{2})^2+1} - 1$

$$= \sqrt{4+2+1-4\sqrt{2}} - 1$$

$$= \boxed{\sqrt{7 \cdot 4\sqrt{2}} - 1}$$

13.



(1) $f(x) = \log 2x$ とおくと

$$f'(x) = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x} \text{ より}$$

接点を $(t, \log 2t)$ とすると

接線の式は

$$y = \frac{1}{t}(x - t) + \log 2t \quad \text{— ① であり}$$

これが $(0, 1)$ を通るから

$$1 = \frac{1}{t}(0 - t) + \log 2t \text{ より}$$

$$1 = -1 + \log 2t$$

$$\log 2t = 2$$

$$2t = e^2$$

よって $t = \frac{e^2}{2}$ より 接点は $\left(\frac{e^2}{2}, 2\right)$

また①より 接線の式は

$$y = \frac{2}{e^2}\left(x - \frac{e^2}{2}\right) + \log 2 \times \frac{e^2}{2} \text{ より}$$

$$y = \frac{2}{e^2}x - 1 + 2$$

ゆえに $\boxed{y = \frac{2}{e^2}x + 1}$

(2) 求める面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} \times (1+2) \times \frac{e^2}{2} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^2}{2}} \log 2x \, dx$$

$$= \frac{3}{4}e^2 - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^2}{2}} (x)' \log 2x \, dx$$

$$= \frac{3}{4}e^2 - \left[x \log 2x\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^2}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^2}{2}} x \times \frac{2}{2x} \, dx$$

$$= \frac{3}{4}e^2 - \frac{e^2}{2} \times 2 + \left[x\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e^2}{2}}$$

$$= \frac{3}{4}e^2 - \frac{4}{4}e^2 + \frac{2}{4}e^2 - \frac{2}{4}$$

$$= \boxed{\frac{1}{4}(e^2 - 2)}$$

14.

(1) $\begin{cases} x = \dfrac{\cos t}{1-\sin t} \\ y = \dfrac{\sin t}{1-\cos t} \end{cases}$ $\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ それぞれをtで微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-\sin t(1-\sin t)-\cos t\cdot(-\cos t)}{(1-\sin t)^2}$$
$$= \frac{-\sin t+\sin^2 t+\cos^2 t}{(1-\sin t)^2}$$
$$= \frac{1-\sin t}{(1-\sin t)^2} = \boxed{\frac{1}{1-\sin t}}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\cos t(1-\cos t)-\sin t\cdot\sin t}{(1-\cos t)^2}$$
$$= \frac{\cos t-\cos^2 t-\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}$$
$$= \frac{-(1-\cos t)}{(1-\cos t)^2} = \boxed{-\frac{1}{1-\cos t}}$$

よって $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{-\frac{1}{1-\cos t}}{\frac{1}{1-\sin t}} = \boxed{-\dfrac{1-\sin t}{1-\cos t}}$ より

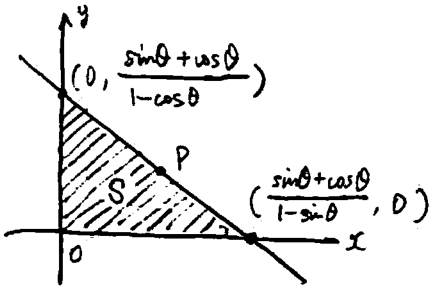
$P\left(\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}, \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)$ における C の接線 l は

$$y = -\frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}\left(x-\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)+\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$ だから

$$y = -\frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}x+\frac{\cos\theta\cancel{(1-\sin\theta)}}{(1-\cos\theta)\cancel{(1-\sin\theta)}}+\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$$\boxed{y = -\frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}x+\frac{\sin\theta+\cos\theta}{1-\cos\theta}} \quad —①$$

(2) ① に $x=0$ 代入すると $y = \dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{1-\cos\theta}$



また $y=0$ 代入すると $x = \dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{1-\sin\theta}$ より

$\left(\dfrac{\alpha}{1-\sin\theta}, 0\right), \left(0, \dfrac{\alpha}{1-\cos\theta}\right)$ を通るので

求める面積Sは

$$S = \frac{1}{2}\times\frac{\alpha}{1-\sin\theta}\times\frac{\alpha}{1-\cos\theta}$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{\alpha^2}{1-\alpha+\sin\theta\cos\theta}$$
$$= \frac{\alpha^2}{2-2\alpha+2\sin\theta\cos\theta}$$

ここで $\sin\theta+\cos\theta = \alpha$ より

$(\sin\theta+\cos\theta)^2 = \alpha^2$ から

$1+2\sin\theta\cos\theta = \alpha^2$

$2\sin\theta\cos\theta = \alpha^2-1$

よって $S = \dfrac{\alpha^2}{2-2\alpha+\alpha^2-1}$

$$= \frac{\alpha^2}{\alpha^2-2\alpha+1}$$
$$= \boxed{\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^2}$$

(3) $S = \left(\dfrac{\alpha}{\alpha - 1}\right)^2$

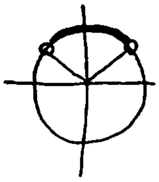
$= \left(\dfrac{\alpha - 1 + 1}{\alpha - 1}\right)^2$

$= \left(1 + \dfrac{1}{\alpha - 1}\right)^2$ であり.

$\alpha = \sin\theta + \cos\theta$

$= \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ だから $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき

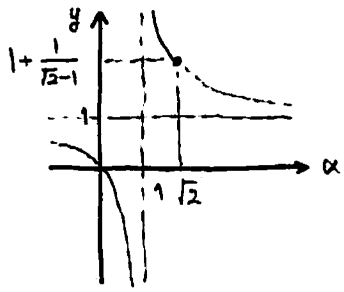
$\frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}$ より



$\frac{1}{\sqrt{2}} < \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$

よって $1 < \alpha \leqq \sqrt{2}$ であるから

$y = 1 + \dfrac{1}{\alpha - 1}$ $(1 < \alpha \leqq \sqrt{2})$ のグラフは下のようになるので

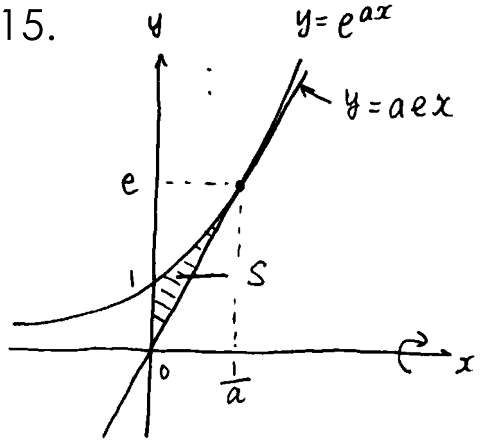


$1 + \dfrac{1}{\alpha - 1} \geqq 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) = 2 + \sqrt{2}$

よって $S \geqq (2 + \sqrt{2})^2$ より

$\boxed{S \geqq 6 + 4\sqrt{2}}$

15.



(1) $y=e^{ax}$ のとき $y'=ae^{ax}$ であるから

(t, e^{at}) での接線は

$y=ae^{at}(x-t)+e^{at}$ であり

これが $(0,0)$ を通るから

$0=-ate^{at}+e^{at}$

$0=(1-at)e^{at}$

$e^{at}\neq 0$ より $1-at=0$ だから $t=\frac{1}{a}$ ($a>0$ より)

このとき 接線は $y=ae^{a\times\frac{1}{a}}x$ より

$y=aex$

よって $V_1=\pi\int_0^{\frac{1}{a}}(e^{ax})^2dx-\frac{1}{3}\times\pi e^2\times\frac{1}{a}$

$=\pi\left[\frac{1}{2a}e^{2ax}\right]_0^{\frac{1}{a}}-\frac{\pi e^2}{3a}$

$=\pi\times\frac{1}{2a}(e^2-1)-\frac{\pi e^2}{3a}=\frac{3e^2-3-2e^2}{6a}\pi=\boxed{\frac{e^2-3}{6a}\pi}$

(2) $V_2=\frac{1}{3}\times\pi\left(\frac{1}{a}\right)^2\times e-\int_1^e\pi x^2dy$ であり

$y=e^{ax}$ より $dy=ae^{ax}\cdot dx$

y	$1 \cdots e$
x	$0 \cdots \frac{1}{a}$

だから

$V_2=\frac{e\pi}{3a^2}-\pi\int_0^{\frac{1}{a}}ax^2e^{ax}dx$

$=\frac{e\pi}{3a^2}-\pi\int_0^{\frac{1}{a}}x^2(e^{ax})'dx$

$=\frac{e\pi}{3a^2}-\pi\left[x^2e^{ax}\right]_0^{\frac{1}{a}}+\pi\int_0^{\frac{1}{a}}2xe^{ax}dx$

$=\frac{e\pi}{3a^2}-\pi\times\frac{1}{a^2}\times e-2\pi\int_0^{\frac{1}{a}}x\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)'dx$

$=\frac{e\pi}{3a^2}-\frac{e\pi}{a^2}-2\pi\left[\frac{xe^{ax}}{a}\right]_0^{\frac{1}{a}}+2\pi\int_0^{\frac{1}{a}}\frac{1}{a}e^{ax}dx$

$=\frac{e\pi}{3a^2}-\frac{e\pi}{a^2}-2\pi\times\frac{1}{a^2}\cdot e+2\pi\left[\frac{1}{a^2}e^{ax}\right]_0^{\frac{1}{a}}$

$=\frac{e\pi}{3a^2}-\frac{e\pi}{a^2}-\cancel{\frac{2e\pi}{a^2}}+\cancel{\frac{2e\pi}{a^2}}+\frac{2\pi}{a^2}$

$=\frac{-2e+6}{3a^2}\pi=\boxed{\frac{2(3-e)}{3a^2}\pi}$

(3) $V_1=V_2$ より $\frac{e^2-3}{\cancel{6a}\,2}=\frac{2(3-e)}{\cancel{3a^2}\,a}$ より $a=\frac{4(3-e)}{e^2-3}$ である