1.

(1) $t^2+pt+q=0$ の解は $t=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$ であり

これが虚数解をもつので $p^2-4q<0$ ―① となる

このとき、$t^2+pt+q=0$ の解 α は

$$\alpha=\frac{-p+\sqrt{4q-p^2}\,i}{2} \text{ または } \alpha=\frac{-p-\sqrt{4q-p^2}\,i}{2} \text{ である}$$

また $\alpha^2+p\alpha+q=0$ がなりたつので $\alpha^2=-p\alpha-q$ である

よって
$$\begin{aligned}\alpha(2-\alpha)&=-\alpha^2+2\alpha\\&=p\alpha+q+2\alpha\\&=(p+2)\alpha+q\\&=(p+2)\cdot\frac{-p\pm\sqrt{4q-p^2}\,i}{2}+q\\&=\left\{(p+2)\times\left(-\frac{p}{2}\right)+q\right\}\pm\frac{1}{2}(p+2)\sqrt{4q-p^2}\,i\end{aligned}$$
となる

これが実数より $\frac{1}{2}(p+2)\sqrt{4q-p^2}=0$ となるが

①より $4q-p^2>0$ であるので $p+2=0$ より $\boxed{p=-2}$ である

このとき $\alpha(2-\alpha)=q$ より

$\alpha(2-\alpha)<2$ のとき $\underline{q<2}$ である ―②

また $p=-2$ を ①に代入して $4-4q<0$ より $\underline{q>1}$ ―③

②③より $\boxed{1<q<2}$ となる

以上のことから求める (p,q) の条件は $\boxed{p=-2,\ 1<q<2}$ である

(1) 別解 $t^2+pt+q=0$ の虚数解は $z,\bar{z}$ とおけて（$\bar{z}$ は z の共役複素数）

$z^2+pz+q=0$ かつ $(\bar{z})^2+p\bar{z}+q=0$ がなりたつ。

ここで解の1つを α（虚数解）とするとき、$\alpha(2-\alpha)$ が実数より

$\alpha(2-\alpha)=\overline{\alpha(2-\alpha)}$ がなりたち、$\alpha=z,\bar{z}$ いずれの場合も

$z(2-z)=\overline{z(2-z)}$ がなりたつから

$$\begin{aligned}-z^2+2z&=-(\bar{z})^2+2\bar{z}\\pz+q+2z&=p\bar{z}+q+2\bar{z}\\(p+2)z+q&=(p+2)\bar{z}+q\end{aligned}$$

よって $(p+2)(z-\bar{z})=0$ より

$p+2=0$ または $z=\bar{z}$ であるが z は虚数より $z\neq\bar{z}$ だから

$\boxed{p=-2}$ となる

このとき　$z^2-2z+q=0$　または　$(\bar{z})^2-2z+q=0$　がなりたつから

$z(2-z)=q$　または　$\bar{z}(2-\bar{z})=q$　より

$\alpha(2-\alpha)=\boxed{q<2}$　である

また　$t^2-2t+q=0$　が虚数解をもつので　$(-1)^2-q<0$　より

$q>1$　である

よって　求める条件は　$\boxed{p=-2,\ 1<q<2}$　である

(2)　$\beta=\dfrac{-p-\sqrt{4q-p^2}\,i}{2}$　であり　$p=-2$　より

$\beta=\dfrac{2-\sqrt{4q-4}\,i}{2}=1-\sqrt{q-1}\,i$　となる

よって　$\beta(1-\beta)=(1-\sqrt{q-1}\,i)\{1-(1-\sqrt{q-1}\,i)\}$

$=(1-\sqrt{q-1}\,i)\sqrt{q-1}\,i$

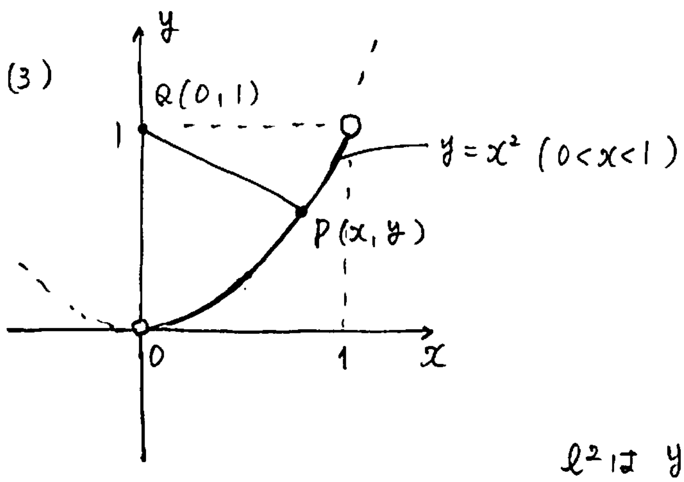
$=(q-1)+\sqrt{q-1}\,i$　となるので

$\begin{cases} x=\sqrt{q-1} \\ y=q-1 \end{cases}$　より　$\boxed{y=x^2}$　となる

但し　$1<q<2$　より　$0<\sqrt{q-1}<1$　だから

$\boxed{0<x<1}$　である

(3)



$P(x, y)$　と　$Q(0,1)$　の距離を　l　とすると

$l^2=x^2+(y-1)^2$

$=y+(y-1)^2$

$=y^2-y+1$

$=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$　より

l^2　は　$y=\frac{1}{2}$　のとき　最小値　$\frac{3}{4}$　をとる

よって　$\boxed{PQ\text{の距離}\ l\ \text{は}\ P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)\ \text{のとき最小値}\ \frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{をとる}}$

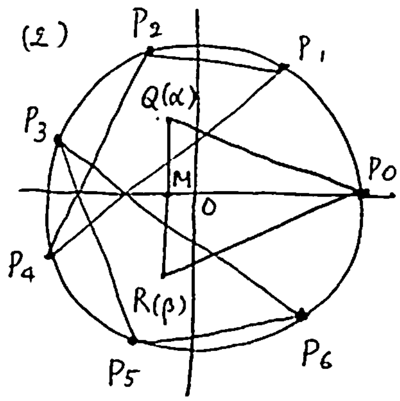
2.

(1) $(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6)(z-1)$

$=(z^7-1)=(\cos 2\pi+i\sin 2\pi-1)=0$ であり、 $z-1\neq 0$ より

$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=\boxed{-1}$ となる

(2)



$\alpha=\dfrac{z+z^2+z^4}{3}$

$\beta=\dfrac{z^3+z^5+z^6}{3}$ であり (1) より

$\alpha+\beta=\dfrac{z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6}{3}=\dfrac{1}{3}$

また $\alpha\beta=\dfrac{(z+z^2+z^4)(z^3+z^5+z^6)}{9}$

$=\dfrac{z^4+z^5+z^7+z^6+z^7+z^9+z^7+z^8+z^{10}}{9}$

$=\dfrac{z^4+z^5+1+z^6+1+z^2+1+z+z^3}{9}$ ($z^7=1$ より)

$=\dfrac{3+(z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6)}{9}=\dfrac{2}{9}$

よって α, β は $t^2+\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}=0$ の解であるから

$9t^2+3t+2=0$ より $t=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-72}}{18}=\dfrac{-3\pm 3\sqrt{7}i}{18}=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{6}$

左上の図より $\boxed{\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{7}i}{6},\ \beta=\dfrac{-1-\sqrt{7}i}{6}}$ となる

(3) QRの中点をMとすると $M\left(-\frac{1}{6}\right)$ であるから

求める面積は $\dfrac{1}{2}\times QR\times MP_0=\dfrac{1}{2}\times 2\times\dfrac{\sqrt{7}}{6}\times\dfrac{7}{6}=\boxed{\dfrac{7\sqrt{7}}{36}}$

3.

$w = \dfrac{2z-i}{z+i}$ より

$w(z+i) = 2z-i$

$(w-2)z = -(w+1)i$

よって $|(w-2)z| = |-(w+1)i|$ がなりたつから

$|w-2||z| = |w+1||i|$ であり $|z| = 2$ であるので

$2|w-2| = |w+1| \times 1$ をみたす ―①

ゆえに $P(w)$, $A(2)$, $B(-1)$ とすると

$2PA = PB$ をみたすので $PA : PB = 1 : 2$ をみたす点の集合となる ―②

① の両辺 2 乗すると $4|w-2|^2 = |w+1|^2$ より

$4(w-2)(\overline{w-2}) = (w+1)(\overline{w+1})$ となるから

$4(w-2)(\overline{w}-2) = (w+1)(\overline{w}+1)$ より

$3w\overline{w} - 9w - 9\overline{w} + 15 = 0$

$w\overline{w} - 3w - 3\overline{w} + 5 = 0$

$(w-3)(\overline{w}-3) = 4$

よって $(w-3)(\overline{w-3}) = 4$ より

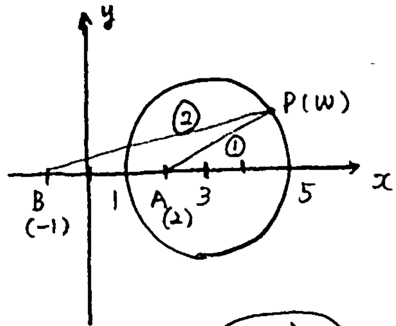
$|w-3|^2 = 4$ だから

$|w-3| = 2$ をみたす

ゆえに w は 点 3 を中心とした半径 2 の円周上となる

よって $|w|$ の最大値は $w=5$ のときで

$\boxed{|w| = 5}$ となる



別解 ② より AB を 1 : 2 に内分、外分する点を直径とする円となる（アポロニウスの円）

別解 2 ① 式に $w = x + yi$ （x, y は実数）として代入すると

$2|(x-2)+yi| = |(x+1)+yi|$ より

$4(x-2)^2 + 4y^2 = (x+1)^2 + y^2$ から

$(x-3)^2 + y^2 = 4$ となる

4.

(1) $\alpha^5 = \cos 360^\circ + i\sin 360^\circ = 1$ をつかうと

$z_1 = \alpha$

$z_2 = z_1^{\,3} = \alpha^3$

$z_3 = z_2^{\,3} = (\alpha^3)^3 = \alpha^9 = \alpha^4$

$z_4 = z_3^{\,3} = (\alpha^9)^3 = \alpha^{27} = \alpha^2$

$z_5 = z_4^{\,3} = (\alpha^{27})^3 = \alpha^{81} = \boxed{\alpha}$

(2) (1)より

$z_1 = z_5 = z_9 = \cdots\cdots = \alpha$

$z_2 = z_6 = z_{10} = \cdots\cdots = \alpha^3$

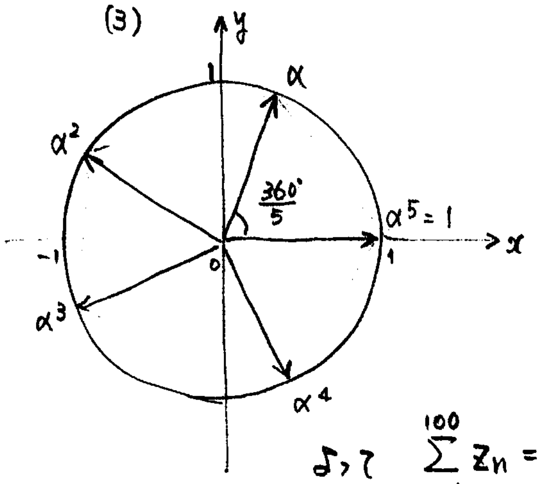
$z_3 = z_7 = z_{11} = \cdots\cdots = \alpha^4$

$z_4 = z_8 = z_{12} = \cdots\cdots = \alpha^2$ となるので

$z_n = \alpha \quad (n = 1, 2, 3, \cdots, 100)$ となるような n の個数は

$\underset{4\times1-3}{z_1} = \underset{4\times2-3}{z_5} = \underset{4\times3-3}{z_9} = \cdots\cdots = \underset{4\times25-3}{z_{97}}$ より $\boxed{25個 である}$

(3)



複素数平面において

$\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5 (=1)$ を表す5つの点は原点を中心とする正五角形の頂点上にあるから、その重心は原点なので

$\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 = 0$ — ①

がなりたつ。

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} z_n = (z_1 + z_5 + z_9 + \cdots\cdots + z_{97})$

$+ (z_2 + z_6 + z_{10} + \cdots\cdots + z_{98})$

$+ (z_3 + z_7 + z_{11} + \cdots\cdots + z_{99})$

$+ (z_4 + z_8 + z_{12} + \cdots\cdots + z_{100})$

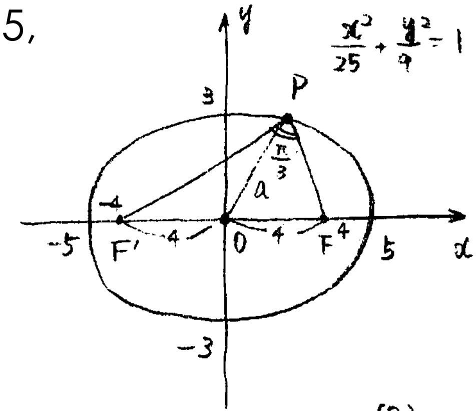
$= 25(\alpha + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^2)$

$= 25 \times (-\alpha^5)$

$= 25 \times (-1^5)$

$= \boxed{-25}$

5,



(1) PF + PF' の値は Pがだ円上のどこにあっても一定だから、Pが (5,0) 上にあるときを考えてもよいので、

$$PF + PF' = 1 + 9 = \boxed{10}$$

(2) 中線定理より

$$PF^2 + PF'^2 = 2(PO^2 + OF^2) \text{ から}$$

$$\boxed{PF^2 + PF'^2 = 2(a^2 + 16)}$$

また

$$(PF+PF')^2 = PF^2 + PF'^2 + 2PF\cdot PF' \text{ より}$$

$$100 = 2(a+16) + 2PF\cdot PF' \text{ から}$$

$$50 = a^2+16 + PF\cdot PF'$$

よって $\boxed{PF\cdot PF' = 34 - a^2}$

(3) $\triangle PFF'$ に 余弦定理より

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{PF^2 + PF'^2 - FF'^2}{2\cdot PF\cdot PF'} \text{ から}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2(a^2+16) - 64}{2\cdot(34-a^2)}$$

よって $34 - a^2 = 2a^2 + 32 - 64$

$$3a^2 = 34 - 32 + 64$$

$$3a^2 = 66$$

$$a^2 = 22 \qquad \text{ゆえに } \boxed{a = \sqrt{22}}$$

Pの座標は $(5\cos\theta, 3\sin\theta)$ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ とおけるから

$$OP^2 = 22 = 25\cos^2\theta + 9\sin^2\theta \text{ より}$$

$$22 = 25\cos^2\theta + 9(1-\cos^2\theta)$$

$$22 = 16\cos^2\theta + 9$$

$$16\cos^2\theta = 13$$

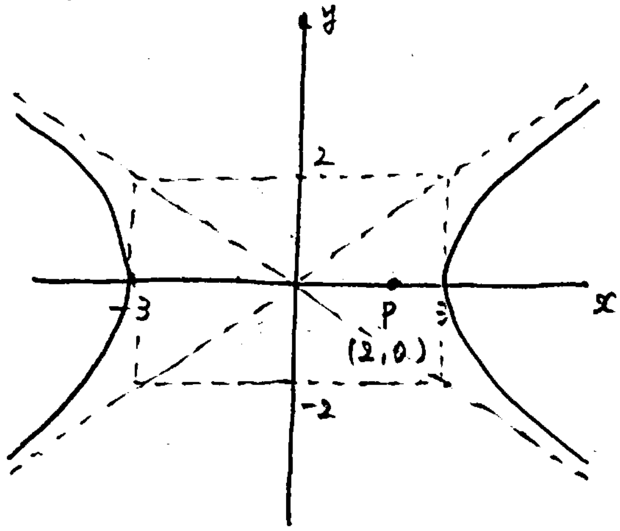
$$\cos^2\theta = \frac{13}{16}$$

θ は第1象限より $\cos\theta = \frac{\sqrt{13}}{4}$ ゆえに $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{13}{16}} = \sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

ゆえに $\boxed{\text{Pの座標は } \left(\frac{5\sqrt{13}}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)}$ となる

6.

(1)



lは $y=m(x-2)$ とおける

これを Hの式に代入すると

$4x^2-9m^2(x-2)^2=36$ より

$(9m^2-4)x^2-36m^2x+36m^2+36=0$ —①

となる

①において

(i) $9m^2-4=0$ のときは

$m=\pm\frac{2}{3}$ となって

漸近線に平行な直線となるから

共有点は1個となり不適

(ii) $9m^2-4\neq0$ のとき

①の判別式をDとすると $\frac{D}{4}>0$ であればよいから

$$\frac{D}{4}=(-18m^2)^2-(9m^2-4)\times36(m^2+1)>0 \text{ より}$$

$$\cancel{18}^2m^4-\cancel{36}(m^2+1)(9m^2-4)>0$$

$$9m^4-(9m^4+5m^2-4)>0$$

$$5m^2-4<0$$

よって $-\frac{2\sqrt{5}}{5}<m<\frac{2\sqrt{5}}{5}$

ゆえに $\boxed{-\frac{2\sqrt{5}}{5}<m<-\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}<m<\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}<m<\frac{2\sqrt{5}}{5}}$ となる

(2) ①の2つの解の積が負より $\frac{36(m^2+1)}{9m^2-4}<0$ であり

分子は正より 分母が負であればよいので $\boxed{-\frac{2}{3}<m<\frac{2}{3}}$ のときとなる

(3) ①の2つの解を α, β $(\alpha<\beta)$ とおくと 中点Mを (X, Y) とすると

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{36m^2}{9m^2-4}=\frac{18m^2}{9m^2-4} \text{ であるから}$$

$$9m^2X-4X=18m^2$$

$$9(X-2)m^2=4X$$

よって $X\neq2$ で $m^2=\frac{4X}{9(X-2)}$ —②

また $M(X,Y)$ は $y=m(x-2)$ 上より

$Y=m(X-2)$ をみたすので

$Y^2=m^2(X-2)^2$ であり

②を代入すると $Y^2=\dfrac{4X}{9(X-2)}(X-2)^2$ より

$9Y^2=4X(X-2)$ だから

$4(X-1)^2-4-9Y^2=0$

よって $\boxed{(X-1)^2-\dfrac{Y^2}{\frac{4}{9}}=1}$ となる

但し $X=\dfrac{18m^2}{9(m^2-\frac{4}{9})}$ であり $-\frac{2}{3}<m<\frac{2}{3}$ より $m^2-\frac{4}{9}<0$

また $m^2\geqq 0$ より

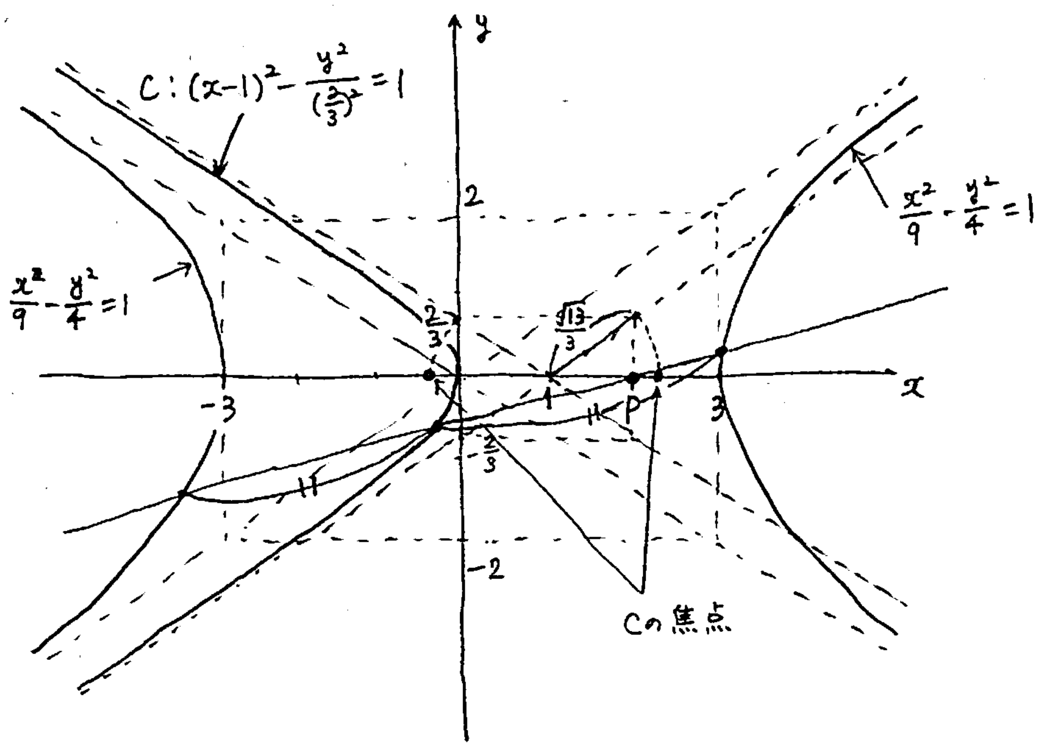
$\boxed{X\leqq 0}$ となる

以上のことから $\boxed{M\text{の軌跡は 双曲線 } (x-1)^2-\dfrac{y^2}{(\frac{2}{3})^2}=1 \quad (x\leqq 0)}$

となる

(4) 焦点の座標は

$\left(1\pm\sqrt{1+(\frac{2}{3})^2},\ 0\right)$ より $\boxed{\left(1\pm\dfrac{\sqrt{13}}{3},\ 0\right)}$ となる



7.

(1)
$$\begin{cases} x = \dfrac{1+4t+t^2}{1+t^2} & -① \\ y = \dfrac{3+t^2}{1+t^2} & -② \end{cases}$$

①は $x = 1 + \dfrac{4t}{1+t^2}$ より $x-1 = \dfrac{4t}{1+t^2}$ よって $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{2t}{1+t^2}$ $-①'$

②は $y = \dfrac{2+(1+t^2)}{1+t^2} = 1 + \dfrac{2}{1+t^2}$ より $y-1 = \dfrac{2}{1+t^2}$ $-②'$

②' を 2乗すると $(y-1)^2 = \dfrac{4}{(1+t^2)^2}$ $-②''$

①' を 2乗すると $\dfrac{(x-1)^2}{4} = \dfrac{4t^2}{(1+t^2)^2}$ $-①''$

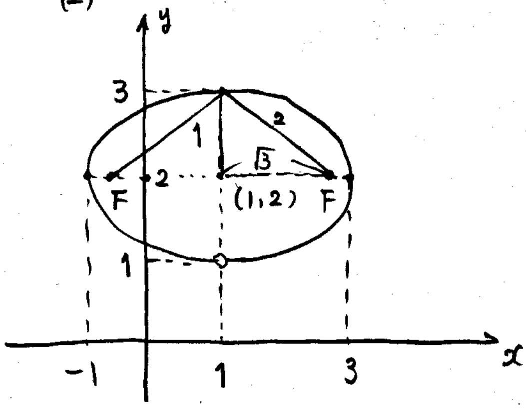
②''+①''より $\dfrac{(x-1)^2}{4} + (y-1)^2 = \dfrac{4(1+t^2)}{(1+t^2)^2} = 2 \cdot \dfrac{2}{1+t^2}$ から

$\dfrac{(x-1)^2}{4} + (y-1)^2 = 2(y-1)$ となるから

$\dfrac{1}{4}(x-1)^2 + \{(y-1)-1\}^2 - 1 = 0$ より

$$\boxed{\frac{(x-1)^2}{4} + (y-2)^2 = 1} \quad -③$$

(2)



② より $y-1 = \dfrac{2}{1+t^2} > 0$ だから

$y > 1$ で考えるので

左図のようになる

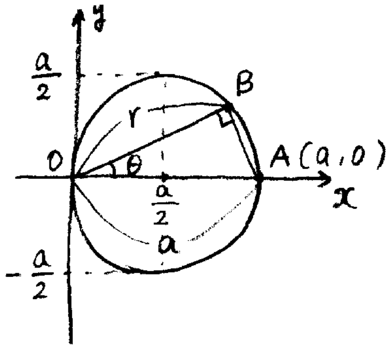
$\boxed{\text{(だ円 } \dfrac{(x-1)^2}{4} + (y-2)^2 = 1 \text{ の } y>1 \text{ の部分 となる)}}$

(3) だ円の焦点が求める点 F, F' となるから

$\boxed{(1+\sqrt{3}, 2) \text{ と } (1-\sqrt{3}, 2)}$ となる

8.

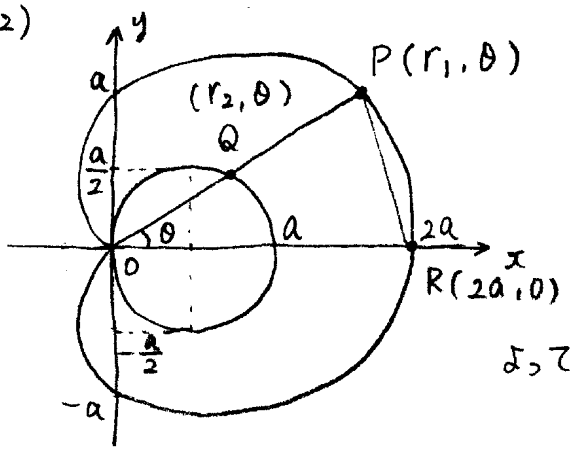
(1) xy 座標で 中心が $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, 半径が $\frac{a}{2}$ の円であるから



$A(a, 0)$ とすると OA を直径とする円が

Sとなるから $\frac{r}{a} = \cos\theta$ より $\boxed{r = a\cos\theta}$ となる

(2)



$P(r_1, \theta)$, $Q(r_2, \theta)$ とおけ

r_1, r_2 は

$$\begin{cases} r_1 = a(1+\cos\theta) & \text{—①} \\ r_2 = a\cos\theta & \text{—②} \end{cases}$$ をみたす.

よって $PQ = r_1 - r_2$

$= a(1+\cos\theta) - a\cos\theta$

$= a$ (一定) となる

(3) $R(2a, 0)$ とすると $\triangle OPR$ で 余弦定理より

$PR^2 = OR^2 + OP^2 - 2OR \cdot OP \cdot \cos\theta$ から

$PR^2 = 4a^2 + r_1^2 - 2 \cdot 2a \cdot r_1 \cos\theta$ であり ① を代入して

$PR^2 = 4a^2 + a^2(1+\cos\theta)^2 - 4a^2(1+\cos\theta)\cos\theta$

$= a^2(1+2\cos\theta+\cos^2\theta) + 4a^2 - 4a^2\cos\theta - 4a^2\cos^2\theta$

$= -3a^2\cos^2\theta - 2a^2\cos\theta + 5a^2$

$= a^2\left\{-3\left(\cos\theta+\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + 5\right\}$

$= a^2\left\{-3\left(\cos\theta+\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{16}{3}\right\}$

ここで $-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であるから PR^2 は $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ で最大値

となり, その値は $\sqrt{a^2 \times \frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}a = \boxed{\frac{4\sqrt{3}}{3}a}$ となる

No
Date

9. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}}$

$y = \dfrac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}}$

yとxを入れかえて

$x = \dfrac{\sqrt{2}y}{\sqrt{1+y^2}}$

$\sqrt{1+y^2}\,x = \sqrt{2}y$

$(1+y^2)x^2 = 2y^2$

$(2-x^2)y^2 = x^2$

$y^2 = \dfrac{x^2}{2-x^2}$

$0 \leqq x \leqq 1$のとき $x \geqq 0$, $2-x^2 \geqq 0$から

$\boxed{y = \dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}}}$

よって $\displaystyle\int_0^1 f^{-1}(x)\,dx$

$= \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$

$x = \sqrt{2}\sin\theta$ とおくと　$dx = \sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$

x	$0 \cdots 1$
θ	$0 \cdots \frac{\pi}{4}$

ゆえに(与式) $= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{2}\cos\theta}\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$

$= \sqrt{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\,d\theta$

$= \sqrt{2}\left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + \cos 0\right)$

$= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)$

$= \boxed{\sqrt{2} - 1}$

10.

(1)

(2)

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta^3}{\tan\theta-\sin\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta^3}{\dfrac{\sin\theta-\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta}}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta^3\cos\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta^3\cos\theta(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos^2\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta^3}{\sin^3\theta}\times\cos\theta(1+\cos\theta)=1^3\times 1\times(1+1)=\boxed{2}$$

(3)

$\frac{1}{x}=t$ とおくと

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos^2 t}{t^2\times(1+\cos t)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos t}$$

$$=1^2\times\frac{1}{1+1}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

(4)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\cos 3x-\cos x}$$

$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$ をつかう

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cancel{\sin x}}{-2\sin 2x\cancel{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{-2\sin 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2x)}{-4\sin 2x}=\frac{1}{-4}\times 1=\boxed{-\frac{1}{4}}$$

(5)

$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $\cos\theta\neq 0$, $\tan\theta\neq 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos^n\theta-\sin^n\theta}{\cos^n\theta+\sin^n\theta}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\tan^n\theta}{1+\tan^n\theta}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{\tan\theta}\right)^n-1}{\left(\frac{1}{\tan\theta}\right)^n+1}$$

ここで $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $\tan>1$ だから $0<\frac{1}{\tan\theta}<1$ となるので

$n\to\infty$ のとき $\frac{1}{\tan\theta}$ は 0 に収束するので

$$(与式)=\frac{0-1}{0+1}=\boxed{-1}$$

11.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(a+bx)}{x^2}=\alpha$$ （有限値） とすると

$\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ より

$$\lim_{x\to 0}\left\{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(a+bx)\right\}=\lim_{x\to 0} x^2\times\frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(a+bx)}{x^2}$$

$$=0\times\alpha=0$$ となるので

$\sqrt{9-8\times 0+7\cos 0}-(a+b\times 0)=0$ より

$4-a=0$ よって $\boxed{a=4}$

このとき
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(a+bx)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(9-8x+7\cos 2x)-(4+bx)^2}{x^2\left\{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+(4+bx)\right\}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-b^2x^2-8(1+b)x-7+7\cos 2x}{x^2\left\{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+(4+bx)\right\}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-b^2x^2-8(1+b)x-7(1-\cos 2x)}{x^2\left\{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+(4+bx)\right\}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-b^2-8(1+b)\times\frac{1}{x}-7\times\frac{2\sin^2 x}{x^2}}{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+(4+bx)}\quad -①$$

ここで①式は α（有限値）を極限にもつので

$1+b=0$ であることが必要であり

このとき $\boxed{b=-1}$ であるから

$$(①式)=\lim_{x\to 0}\frac{-(-1)^2-14\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+(4-x)}$$

$$=\frac{-1-14\times 1^2}{\sqrt{9-8\times 0+7\cos 0}+4-0}=\boxed{-\frac{15}{8}}$$ となる

また $(a,b)=(4,-1)$ のとき

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(4-x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(9-8x+7\cos 2x)-(4-x)^2}{x^2\left\{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+(4-x)\right\}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2-7(1-\cos 2x)}{x^2\left\{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+(4-x)\right\}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1-7\times 2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+(4-x)}$$

$$=\frac{-1-14\times 1^2}{\sqrt{9-8\times 0+7\cos 0}+4}=-\frac{15}{8}$$ となって有限値 $-\frac{15}{8}$ をとる

以上のことから $\boxed{(a,b)=(4,-1)\text{ で、そのときの極限値は }-\frac{15}{8}\text{ となる}}$

12.

(1) $a_{n+2}=(1-\alpha)a_{n+1}+\alpha a_n$ より

$\boxed{a_3}=(1-\alpha)a_2+\alpha a_1=\boxed{1-\alpha}$

$\boxed{a_4}=(1-\alpha)a_3+\alpha a_2=(1-\alpha)^2+\alpha$

$=\boxed{1-\alpha+\alpha^2}$

$\boxed{a_5}=(1-\alpha)a_4+\alpha a_3=(1-\alpha)(1-\alpha+\alpha^2)+\alpha(1-\alpha)$

$=(1-\alpha)(1+\alpha^2)$

$=\boxed{1-\alpha+\alpha^2-\alpha^3}$

(2) $a_{n+2}=(1-\alpha)a_{n+1}+\alpha a_n$ より

$a_{n+2}-a_{n+1}=-\alpha(a_{n+1}-a_n)$ であるから

$b_n=a_{n+1}-a_n$ のとき $\{b_n\}$ は 初項 $b_1=a_2-a_1=1$.
公比 $-\alpha$ の 等比数列より

$\boxed{b_n=(-\alpha)^{n-1}}$

(3) (2)より $n\geqq 2$ のとき. $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

$=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-\alpha)^{k-1}$

$=0+\dfrac{1\times\{1-(-\alpha)^{n-1}\}}{1-(-\alpha)}=\dfrac{1-(-\alpha)^{n-1}}{1+\alpha}$ —①

①は $n=1$ で 0になるので $n=1$ でもなりたつ

よって $\boxed{a_n=\dfrac{1-(-\alpha)^{n-1}}{1+\alpha}}$

(4) $-1<(-\alpha)<1$ で収束し.

$\lim_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{1+\alpha}$ となるから $\dfrac{1}{1+\alpha}=\dfrac{2}{3}$ をとくと

$2+2\alpha=3$ より

$2\alpha=1$

$\alpha=\dfrac{1}{2}$

これは $-1<(-\alpha)<1$ をみたす

よって $\boxed{\alpha=\dfrac{1}{2} \text{ である}}$

13.

(1) A, Bの札の出方は（赤, 赤）,（赤, 白）,（白, 赤）,（白, 白）の4通りがあり
これらは同様にたしからしい。

このうち 白札の枚数が1となるのは（赤, 赤）と（白, 白）のときだから

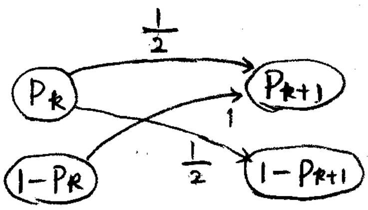
$$P_1 = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

(2) $n=k$のとき

白札の枚数 0 のとき $n=k+1$ では必ず赤白1枚ずつになり

白札の枚数 2 のときも $n=k+1$ では必ず赤白1枚ずつになる

白札の枚数 1 のときは (1)と同様に次に赤白1枚ずつとなるのは $\frac{1}{2}$ の確率となる



よって $P_{n+1} = \frac{1}{2}P_n + 1 \times (1-P_n)$ より

$\boxed{P_{n+1} = -\frac{1}{2}P_n + 1}$ となる ①

$c = -\frac{1}{2}c + 1$

$\frac{3}{2}c = 1$

$c = \frac{2}{3}$

(3) ①式の両辺から $\frac{2}{3}$ をひいて

$P_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(P_n - \frac{2}{3}\right)$ より

$\left\{P_n - \frac{2}{3}\right\}$ は 初項 $P_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$

公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列だから

$P_n - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ より

$P_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ゆえに $\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} = \boxed{\frac{2}{3}}$ となる

No

Date

14. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の公比をそれぞれ r_1, r_2 とすると.

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\frac{8}{3}$ から

$$\boxed{\frac{1}{1-r_1}+\frac{1}{1-r_2}=\frac{8}{3}} \quad — ①$$

また. $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ は初項1, 公比 r_1r_2 $|r_1r_2|<1$ の無限等比級数だから

$$\boxed{\frac{1}{1-r_1r_2}=\frac{4}{5}} \quad — ②$$

②から. $4(1-r_1r_2)=5$

$4-4r_1r_2=5$

$4r_1r_2=-1$

$8r_1r_2=-2 \quad — ②'$

①から $\frac{1-r_2+1-r_1}{(1-r_1)(1-r_2)}=\frac{8}{3}$

$3(2-r_1-r_2)=8(1-r_1)(1-r_2)$

$6-3(r_1+r_2)=8-8(r_1+r_2)+8r_1r_2$

$5(r_1+r_2)=2+8r_1r_2$

②'を代入して

$5(r_1+r_2)=2-2$

$5(r_1+r_2)=0$

$\boxed{r_1+r_2=0}$ $\quad$ $\boxed{r_1r_2=-\frac{1}{4}}$

$r_1\cdot(-r_1)=-\frac{1}{4}$

$\boxed{r_1^2=\frac{1}{4}}$ $\quad$ 同様に $\boxed{r_2^2=\frac{1}{4}}$

ゆえに $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$

$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2+2\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$

$=\frac{1}{1-r_1^2}+\frac{1}{1-r_2^2}+2\times\frac{1}{1-r_1r_2}$

$=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}+\frac{1}{1-\frac{1}{4}}+2\times\frac{1}{1-(-\frac{1}{4})}$

$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+2\times\frac{4}{5}$

$=\frac{20+20+24}{15}$

$=\boxed{\frac{64}{15}}$

15.

(1) i) $x>0$であるから　$1<\sqrt{1+x}$ は明らかになりたつ。

ii) $\sqrt{1+x}<1+x$ の証明

$f(x)=(1+x)-\sqrt{1+x}$ とおくと

$$f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{2\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$=\frac{4(1+x)-1}{2\sqrt{1+x}\,(2\sqrt{1+x}+1)}$$

$$=\frac{4x+3}{4(1+x)+2\sqrt{1+x}}>0 \quad (\because x>0)$$

よって $f(x)$ は $x>0$ で単調増加であり、

$f(0)=(1+0)-\sqrt{1+0}=0$ より

$x>0$ で $f(x)>0$ がなりたつ。

ゆえに $x>0$ で $\sqrt{1+x}<1+x$ がなりたつ。

i) ii) より　$x>0$ のとき $1<\sqrt{1+x}<1+x$ はなりたつ。

(2) $x>0$ で　$1<\sqrt{1+x}<1+x$ がなりたつから，n, k を自然数とすると

$\frac{1}{n}<\frac{1}{n}\sqrt{1+x}<\frac{1}{n}(1+x)$ もなりたち

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$$ がなりたつ。

この左辺は $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1=\frac{1}{n}\times n=1$ で

右辺は $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\frac{1}{n}\left\{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\left(1+\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{n+\frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

$$=1+\frac{n+1}{2n^2}$$

$$=1+\frac{1+\frac{1}{n}}{2n}$$ となるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=1$$ となるので

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}=1$$