数学Ⅲ 基礎問題精講 解説

P123｜演習問題68

ポイント

① 平均値の定理に、どんな $f(x)$ を入れるかを見極めるのが第一歩

② 「平均値の定理を使って、不等式を証明する」問題は、a<c<bを使うことが多い

③ 最終的に導出したい式にするために無理やり変形することが、証明問題の鉄則

解説

(1)の正答率は97.2%あったので、(2)から解説していきます。

「平均値の定理を用いて」とあるので、とにもかくにも代入してみましょう。平均値の定理は、

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

ですので、あとは $f(x)$ に何を入れるかを見極めるだけです（ポイント①）。

(1)が誘導問題っぽかったことと、不等式に、

$$e^{\beta}\sin\beta-e^{\alpha}\sin\alpha$$

という式があるので、

（これが $f(b)-f(a)$ に当たる部分なんだろうなぁ）

と予想するわけです。では実際に、平均値の定理に $f(x)=e^{x}\sin x$ を代入してみましょう。

f(x)はα≦x≦βにおいて連続で、α<x<βで微分可能なので、平均値の定理から

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma) \quad , \quad \alpha<\gamma<\beta$$

を満たすγが少なくとも一つ存在します。よって、

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma)$$

⇔

$$\frac{e^{\beta}\sin\beta-e^{\alpha}\sin\alpha}{\beta-\alpha}=e^{\gamma}(\sin\gamma+\cos\gamma)$$

となります。さて、ここで、最終的に導出したい式と見比べてみましょう（ポイント③）。

$$\left|e^{\beta}\sin\beta-e^{\alpha}\sin\alpha\right|<\sqrt{2}(\beta-\alpha)e^{\beta}$$

対応させてみると、次のように変形しないといけないことがわかります。

① $e^{\beta}\sin\beta-e^{\alpha}\sin\alpha$ を、$\left|e^{\beta}\sin\beta-e^{\alpha}\sin\alpha\right|$ にする
② e^{γ} を e^{β} にする
③ $\sin\gamma+\cos\gamma$ を $\sqrt{2}$ にする

＊＊＊

順々に考えていきましょう。
まず、①については、両辺に絶対値をつければ良いですね。

$$\left|\frac{e^{\beta}\sin\beta-e^{\alpha}\sin\alpha}{\beta-\alpha}\right|=\left|e^{\gamma}(\sin\gamma+\cos\gamma)\right|$$

両辺に$|\beta-\alpha|$をかけて、

$$\left|e^{\beta}\sin\beta-e^{\alpha}\sin\alpha\right|=|\beta-\alpha|\cdot\left|e^{\gamma}(\sin\gamma+\cos\gamma)\right|$$

$\beta>\alpha$なので、$|\beta-\alpha|$の絶対値をとって$(\beta-\alpha)$にすることができます。よって、

$$\left|e^{\beta}\sin\beta-e^{\alpha}\sin\alpha\right|=(\beta-\alpha)\cdot\left|e^{\gamma}(\sin\gamma+\cos\gamma)\right|$$

これで①は終了しましたね。
続いて②について。ここでは「ポイント②」が登場です。

「平均値の定理」を用いて不等式の証明をする場合は、$\alpha<\gamma<\beta$ の不等式を利用することが多々あります。
今回の場合も、e^x は単調増加する関数なので、

$$\gamma<\beta \quad \Leftrightarrow \quad e^\gamma<e^\beta$$

となります。よって、

$$\left|e^\beta\sin\beta-e^\alpha\sin\alpha\right|=(\beta-\alpha)\cdot\left|e^\gamma(\sin\gamma+\cos\gamma)\right|$$

$\Rightarrow$

$$\left|e^\beta\sin\beta-e^\alpha\sin\alpha\right|<(\beta-\alpha)\cdot\left|e^\beta(\sin\gamma+\cos\gamma)\right|$$

となります。また、常に e^β は正ですので、絶対値を外して

$$\left|e^\beta\sin\beta-e^\alpha\sin\alpha\right|<(\beta-\alpha)e^\beta\left|\sin\gamma+\cos\gamma\right|$$

となります。

これで、②も終わりました。とうとう最後の③です。
・・・と言っても、これも難しくありません。

$$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

となることが見抜ければほぼ終わり。

$$\left|\sin\theta+\cos\theta\right|=\left|\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right|=\sqrt{2}\left|\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leq\sqrt{2}$$ ※sinは-1~1の間になので $\left|\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leq 1$

ということから、

$$\left|e^\beta\sin\beta-e^\alpha\sin\alpha\right|<\sqrt{2}(\beta-\alpha)e^\beta$$

となるのです。解答の流れ、わかりましたか？