

数学ⅡB 基礎問題精講 解説

P107 | 演習問題64(3)

ポイント

$$\sqrt{x^2} = x \quad \text{としない!}$$

解説

(1),(2)の正答率はそれぞれ96.3%、74.1%あったので、(3)の解説をしていきます。

突然ですが、次の問題を解いてみてください。

$$\sqrt{(-1)^2} =$$

・・・わかりましたでしょうか？

普通、 $\sqrt{(-1)^2} = -1$ とするか $\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$ とするかで迷ってしまいますよね。正解は

$$\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

です。なぜこうするのでしょうか？

その理由は「ルールだから」です。このようにルール決めをしなければどちらも正解になってしまうから、数学者たちが決めたのです。

「ルートの中を計算したあと、ルートの計算をする」と。

同じようなルールに「 $2 \times 3 - 1$ は、かけざんを計算したあと、割り算を計算する」というものや

「 $(1+3) \times 2$ は、かっこの中から先に計算をする」といったものがあります。

さて、以上を踏まえると、

$$\sqrt{x^2} =$$

という問題があったとき、

$$\sqrt{x^2} = x$$

とはしないはずですが。なぜなら、もしも $x = -1$ だった場合、

$$\sqrt{(-1)^2} = -1$$

としているのと同じだからです。これはルール違反ですよ。

よって、次のような場合分けが必要なのです。

$$\sqrt{x^2} = x \quad (0 \leq x)$$

$$\sqrt{x^2} = -x \quad (x < 0)$$

1つの式にまとめた方がシンプルで見栄えがいいので、 $\sqrt{x^2} = |x|$ と表記することもあります。

以上が理解できたら、

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} \right)^2} \quad \text{となったときに、}$$

$\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} \right)$ の正負で場合分けしなければならないことも理解できるはずですが。

正負の分けれ道は $a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 0$ となるような a です。指数に分数があるとわかりにくいので、

$$\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} = 0 \quad \text{と書き換えましょう。}$$

すると、両辺に \sqrt{a} をかければ $a - 1 = 0$ となることがすぐわかります。

よって、 $a = 1$ で場合分けをして、

$$\sqrt{\frac{1}{4} \left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} \right)^2} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} \right) & (1 \leq a) \\ \frac{1}{2} \left(a^{-\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} \right) & (0 < a < 1) \end{cases} \quad \dots \text{となるのです。}$$