数学III 基礎問題精講 解説

P23｜演習問題11

ポイント

① 立体が出てきたら、まずは”底面の図形”（z=0など）を求めてみる

② 続いて、”天井の図形

解説

極座標（1, π）を見た瞬間に「生理的に無理」と感じてしまう人はたくさんいます。
しかし、極座標（1, π）が表していることはとてもシンプルです。

「長さ1の線分を、原点周りにπだけを回転させた先」

の座標です。

他にも（2, $\pi/3$）という極座標があったら、それは、

「長さ2の線分を、原点周りに$\pi/3$だけ回転させた先」

の座標です。

また、点Pが（r, θ）と表されているとき、この点Pが

「長さrの線分を、原点周りにθだけ回転させた先」

の座標を表しています。

＊＊＊

さて、とある極座標上の動点Pを（r, θ）とおきます。これがとある条件下（PAの長さがPOの長さrより、定数aだけ長い）で、動いていますので、この条件を立式すれば、rとθの関係が求まります。この「rとθの関係」こそが、極方程式です。

では、点Pが満たしている条件「PAの長さがPOの長さrより、定数aだけ長い」を、式に直していきましょう。

で、結論からいうと、問題文中にある図を見て気づいて欲しいのですが、3辺の長さと1角がわかっているので、

「余弦定理を使えば関係式が出せる！」

となります。よって、解答のようになります。

(2)については、

「PAが最小」⇔「r+aが最小」

なのですが、aは定数なので、

「PAが最小」⇔「r+aが最小」⇔「rが最小」

となります。ここで、(1)で求めた式を使えばいいことに気づきます。

$$2r(a-\cos\theta)=1-a^2$$

⇔

$$r=\frac{1-a^2}{2(a-\cos\theta)}$$ （ただし、cosθ≠aのとき）

と変形でき、分子（ $1-a^2$ ）はやっぱり定数なので、分母（a-cosθ）が最大になればよさそうです。ということで、

「PAが最小」⇔「r+aが最小」⇔「rが最小」⇔「a-cosθが最大」

と言い換えることができます。
最後にもうひと変形。やっぱりaは定数なので、a-cos θ が最大になるには、-cos θ が最大になればいい。つまり、cos θ が最小になれば良い（$\theta = \pi$）ですね。まとめると、

「PAが最小」⇔「r+aが最小」⇔「rが最小」⇔「a-cos θ が最大」⇔「$\theta = \pi$」

ということです。

最終的に点Pの座標を求めたい、つまりrと θ を求めたいので、あとはrだけ。

$$2r\left(a - \cos\theta\right) = 1 - a^2$$

に $\theta = \pi$ を代入して、

$$r = \frac{1-a}{2}$$

となるのです。わかりましたでしょうか？