1.

$$|x|+2|x-4| = \begin{cases} x+2(x-4) = 3x-8 & (x \geqq 4) \\ x+2(-x+4) = -x+8 & (0 \leqq x < 4) \\ -x+2(-x+4) = -3x+8 & (x < 0) \end{cases}$$ であるので

・ $|x|+2|x-4| \leqq 10$ をとくと

(i) $x \geqq 4$ のとき

$3x-8 \leqq 10$ より

$3x \leqq 18$

$x \leqq 6$

よって $\underline{4 \leqq x \leqq 6}$

(ii) $0 \leqq x < 4$ のとき

$-x+8 \leqq 10$ より

$-x \leqq 2$

$x \geqq -2$

よって $\underline{0 \leqq x < 4}$

(iii) $x < 0$ のとき

$-3x+8 \leqq 10$ より

$-3x \leqq 2$

$x \geqq -\frac{2}{3}$

よって $\underline{-\frac{2}{3} \leqq x < 0}$

(i)(ii)(iii)より $\dfrac{\overset{アイ}{\boxed{-2}}}{\underset{ウ}{\boxed{3}}} \leqq x \leqq \overset{エ}{\boxed{6}}$ となる ― ①

・ $|x|+2|x-4| \geqq 6$ をとくと

(i) $x \geqq 4$ のとき

$3x-8 \geqq 6$ より

$3x \geqq 14$

$x \geqq \frac{14}{3}$

よって $\underline{x \geqq \frac{14}{3}}$

(ii) $0 \leqq x < 4$ のとき

$-x+8 \geqq 6$ より

$-x \geqq -2$

$x \leqq 2$

よって $\underline{0 \leqq x \leqq 2}$

(iii) $x < 0$ のとき

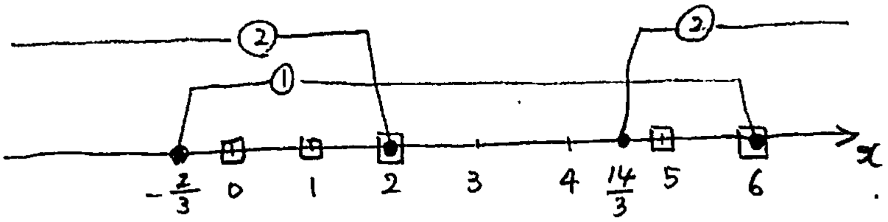
$-3x+8 \geqq 6$ より

$-3x \geqq -2$

$x \leqq \frac{2}{3}$

よって $\underline{x < 0}$

(i)(ii)(iii)より $x \leqq \overset{オ}{\boxed{2}}$, $\dfrac{\overset{カキ}{\boxed{14}}}{\underset{ク}{\boxed{3}}} \leqq x$ となる ― ②



①②より 整数解は $x=0, 1, 2, 5, 6$ となるので

$\overset{ケ}{\boxed{5}}$ 個 ある

2.

(1) $y=-x^2+ax+a^2$ より

$$y=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+a^2$$

$$y=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{5}{4}a^2$$

よって頂点の座標は $\left(\frac{a}{\underset{\text{ア}}{\boxed{2}}},\ \frac{\overset{\text{イ}}{\boxed{5}}}{\underset{\text{ウ}}{\boxed{4}}}a^2\right)$

であるから頂点を (X, Y) とすると

$$\begin{cases} X=\dfrac{a}{2} & \text{—①} \\ Y=\dfrac{5}{4}a^2 & \text{—②} \end{cases}$$ であり

①より $a=2X$ だから

②は $Y=\frac{5}{4}\times(2X)^2=5X^2$

よって頂点は $y=\underset{\text{エ}}{\boxed{5}}x^2$ 上にある

(2) $A(-1,1)$ と $B(2,4)$ を通る直線は

$$y=\frac{4-1}{2+1}(x-2)+4$$ より

$y=x+2$ だから C_a の式と連立にすると

$x+2=-x^2+ax+a^2$ より

$$x^2+(1-a)x+(2-a^2)=0 \quad \text{—③}$$

この方程式が実数解をもてばよいので

実数解条件より $(1-a)^2-4(2-a^2)\geqq 0$ だから

$$5a^2-2a-7\geqq 0$$

$$(a+1)(5a-7)\geqq 0$$

$\begin{matrix}1 & & 1\\ 5 & \times & -7\end{matrix}$

よって $a\leqq \underset{\text{オカ}}{\boxed{-1}},\ \frac{\overset{\text{キ}}{\boxed{7}}}{\underset{\text{ク}}{\boxed{5}}}\leqq a$ —④

$a=-1$ と $a=\frac{7}{5}$ のときは③は重解となるから

その解は $x=\frac{a-1}{2}$ より

$a=-1$ のときは $x=\frac{-1-1}{2}=-1$

よって $y=-(-1)^2-1\times(-1)+(-1)^2$

$=-1+1+1=1$ より

共有点は $\left(\underset{\text{ケコ}}{\boxed{-1}},\ \underset{\text{サ}}{\boxed{1}}\right)$

$a=\frac{7}{5}$ のときは $x=\dfrac{\frac{7}{5}-1}{2}=\dfrac{\frac{2}{5}}{2}=\frac{1}{5}$

よって $y=-\left(\frac{1}{5}\right)^2+\frac{7}{5}\times\frac{1}{5}+\left(\frac{7}{5}\right)^2$

$=-\frac{1}{25}+\frac{7}{25}+\frac{49}{25}$

$=\frac{55}{25}=\frac{11}{5}$ より

共有点は $\left(\frac{\overset{\text{シ}}{\boxed{1}}}{\underset{\text{ス}}{\boxed{5}}},\ \frac{\overset{\text{セソ}}{\boxed{11}}}{\underset{\text{タ}}{\boxed{5}}}\right)$ である

また C_a が線分ABと異なる2点を共有する場合

③の方程式が $-1\leqq x\leqq 2$ で異なる2つの共有点をもてばよいので、③の判別式を D, $f(x)=x^2+(1-a)x+(2-a^2)$ とおくと

$$\begin{cases} D>0 & \text{—⑤} \\ -1<(\text{軸})<2 & \text{—⑥} \\ f(-1)\geqq 0 & \text{—⑦} \\ f(2)\geqq 0 & \text{—⑧} \end{cases}$$ が同時になりたてばよい

⑤をとくと，④より $a<-1,\ \frac{7}{5}<a$ —⑤'

⑥をとくと $-1<\frac{a-1}{2}<2$ より

$-2<a-1<4$

よって $-1<a<5$ —⑥'

⑦をとくと $f(-1)=1-1+a+2-a^2\geqq 0$ より

$-a^2+a+2\geqq 0$

$a^2-a-2\leqq 0$

$(a-2)(a+1)\leqq 0$

よって $-1\leqq a\leqq 2$ —⑦'

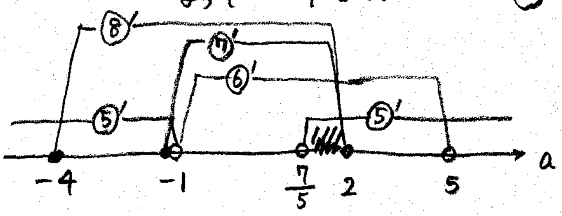
⑧をとくと $f(2)=4+2(1-a)+(2-a^2)\geqq 0$ より

$-a^2-2a+8\geqq 0$

$a^2+2a-8\leqq 0$

$(a+4)(a-2)\leqq 0$

よって $-4\leqq a\leqq 2$ —⑧'

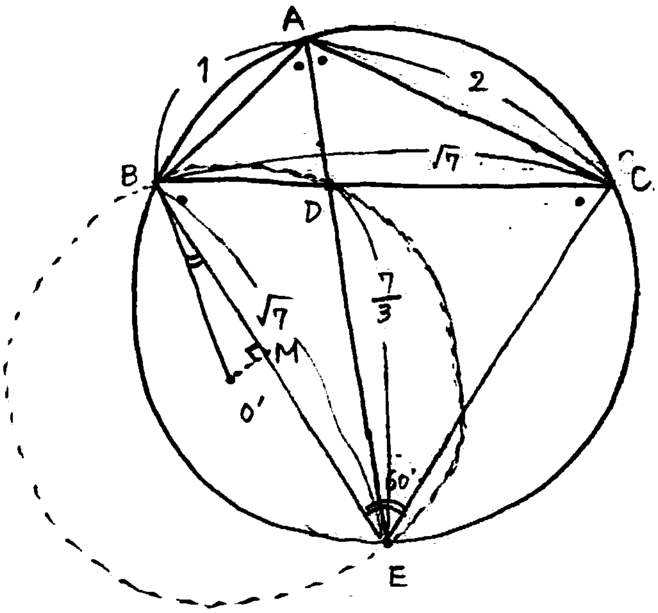


⑤'⑥'⑦'⑧'より $\frac{\overset{\text{チ}}{\boxed{7}}}{\underset{\text{ツ}}{\boxed{5}}}<a\leqq \overset{\text{テ}}{\boxed{2}}$ である

解答記号	正解	配点
アイウ	254	6
エ	5	4
オカ	−1	3
キク	75	3
ケコサ	−11	4
シスセソタ	15115	4
チツテ	752	11

35点

3.



$$\cos\angle CAB = \frac{2^2+1^2-(\sqrt{7})^2}{2\times2\times1} = \frac{4+1-7}{4} = -\frac{1}{2}$$ より

$\angle CAB = \boxed{120}°$ アイウ

また、角の二等分線の性質より

$BD : CD = AB : AC = 1 : 2$ から

$BD = \frac{1}{3}BC = \boxed{\frac{\sqrt{7}}{3}}$ エオ

$CD = \frac{2}{3}BC = \boxed{\frac{2\sqrt{7}}{3}}$ カキク となる。

円周角の定理より $\angle CAE = \angle CBE$

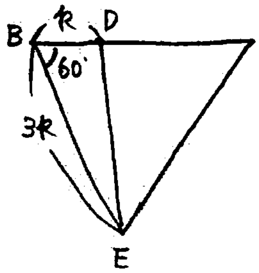
また円に内接する四角形の対角の和は $180°$ より

$\angle BEC = 60°$

よって $\angle DAB$ と等しい角は $\boxed{\angle DBE}$ ⓪ と $\boxed{\angle BEC}$ ④ となる。

これより $\triangle BCE$ は正三角形となるから $BE = BC = CE = \boxed{\sqrt{7}}$ サ となる。

解答記号	正解	配点
アイウ	120	3
エオ	73	3
カキク	273	3
ケコ	04 または 40	6 (各3)
サ	7	3
シス	73	4
セソタ	739	4
チツ	39	4
		30点



$BD = k$, $BE = 3k$ とおけるから

$$DE^2 = k^2 + (3k)^2 - 2k\cdot3k\cos60° = k^2 + 9k^2 - 3k^2 = 7k^2$$ より $DE = \sqrt{7}k$.

よって $DE = \sqrt{7}\,BD = \boxed{\frac{7}{3}}$ シス

$\triangle BED$ の外接円の中心を O' とすると $O'B$ はその半径より

$2\cdot O'B = \frac{DE}{\sin60°}$ から $O'B = \frac{\frac{7}{3}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{7}{3\sqrt{3}} = \boxed{\frac{7\sqrt{3}}{9}}$ セソタ

BEの中点をMとすると、

$$\cos\angle EBO' = \frac{BM}{O'B} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\frac{7\sqrt{3}}{9}} = \frac{9\sqrt{7}}{14\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{21}}{14\times3} = \frac{3\sqrt{21}}{14}$$ であり

$1+\tan^2\angle EBO' = \frac{1}{\cos^2\angle EBO'}$ より $\tan^2\angle EBO' = \left(\frac{14}{3\sqrt{21}}\right)^2 - 1 = \frac{14\times14}{9\times21} - 1 = \frac{28-27}{27} = \frac{1}{27}$

よって $\tan\angle EBO' = \sqrt{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{9}}$ チツ

4.

(1) 1 2 3 4 5
↑↑↑↑

↑の区切り4か所から2か所えらんで群に分ければよいので $_4C_2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$ より $\boxed{6}$ 通り
ア

(2) ○○○○○
↑↑↑↑

○の場所は数を並べるので $5!$

↑は(1)より $_4C_2$

よって $5! \times {}_4C_2 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 6 = 720$ より $\boxed{720}$ 通り
イウエ

(3) △△△|○|○

区切りの場所は左のような場合で決定

△は奇数で $3!$ ○は偶数で $2!$

よって $3! \times 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 2 = 12$ より $\boxed{12}$ 通り
オカ

(4) 1 ◯ | 3 ◯ | 5 ◯ 左の◯に2, 4を入れればよい

(i) 1つの◯に2, 4両方入るとき

◯3つの中から1つえらんで

2, 4を順も考えて入れるので

$_3C_1 \times 2! = 6$

(ii) 2つの◯に分かれて入るとき

◯3つの中から2つえらんで

2, 4を順も考えて入れるので

$_3C_2 \times 2! = 6$

よって $6 + 6 = 12$ より $\boxed{12}$ 通り
キク

解答記号	正解	配点
ア	6	7
イウエ	720	8
オカ	12	7
キク	12	8
		30点

5. 5個の玉のとり出し方は ${}_{11}C_5 = \dfrac{11\cdot\cancel{10}^{1}\cdot\cancel{9}^{3}\cdot\cancel{8}^{2}\cdot7}{\cancel{5}_{1}\cdot\cancel{4}_{1}\cdot\cancel{3}_{1}\cdot\cancel{2}_{1}\cdot1} = 11\times6\times7 = \underset{}{\overset{\text{アイウ}}{\boxed{462}}}$ (通り)

(1) R1 R2 R3 R4 R5 　B

W1 W2 W3 W4 W5

「0点で黒を含むもの」は 黒のとりだし方は 1通り

のこり4コの とりだし方は 4つの数字は全てバラバラであるから

1〜5の中から 4つえらんで、それぞれに 白,赤の2通りずつ

考えられることから

$1\times{}_5C_4\times2\times2\times2\times2 = 5\times16 = \underset{\text{エオ}}{\boxed{80}}$ (通り)

「0点で黒を含まないもの」は 1〜5の数字が1枚ずつ存在し (${}_5C_5$)

そのそれぞれに 白,赤の2通りずつあるので

$2^5 = \underset{\text{カキ}}{\boxed{32}}$ (通り)

「1点で黒を含むもの」は 黒のとりだし方は 1通り.

のこり4コは 数字が3種類で、そのうち1種類は

赤も白もえらばれるので $\underbrace{{}_5C_3}_{\text{3種類}}\times\underbrace{{}_3C_1}_{\text{赤白両方の数字のえらび方}}\times\underbrace{2\times2}_{\text{1つしかない数字の色のちがい}}$ となるので

$1\times{}_5C_3\times{}_3C_1\times2\times2 = 10\times3\times4 = \underset{\text{クケコ}}{\boxed{120}}$ (通り)

「1点で黒を含まないもの」は

数字は4種類で、そのうち1種類は赤白両方であるので

${}_5C_4\times{}_4C_1\times2\times2\times2 = 5\times4\times8 = \underset{\text{サシス}}{\boxed{160}}$ (通り)

(2) 1点である確率は $\dfrac{120+160}{462} = \dfrac{280}{462} = \dfrac{140}{231} = \boxed{\dfrac{20}{33}}$ $\begin{smallmatrix}\text{セソ}\\\text{タチ}\end{smallmatrix}$

0点である確率は $\dfrac{80+32}{462} = \dfrac{112}{462} = \dfrac{56}{231} = \dfrac{8}{33}$

よって 2点である確率は $1-\dfrac{20}{33}-\dfrac{8}{33} = \boxed{\dfrac{5}{33}}$ $\begin{smallmatrix}\text{ツ}\\\text{テト}\end{smallmatrix}$

となるから

得点の期待値は $1\times\dfrac{20}{33}+0\times\dfrac{8}{33}+2\times\dfrac{5}{33}$

$= \dfrac{30}{33} = \boxed{\dfrac{10}{11}}$ $\begin{smallmatrix}\text{ナニ}\\\text{ヌネ}\end{smallmatrix}$

となる

解答記号	正解	配点
アイウ	462	4
エオ	80	3
カキ	32	3
クケコ	120	3
サシス	160	3
セソタチ	2033	3
ツテト	533	3
ナニヌネ	1011	3
		25点

6.

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$ であるから

$\dfrac{x-a}{x^2+x+1}>\dfrac{x-b}{x^2-x+1}$ の両辺に $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ をかけると

$(x^2-x+1)(x-a)>(x^2+x+1)(x-b)$ がなりたつので

$x^3+(-a-1)x^2+(a+1)x-a>x^3+(-b+1)x^2+(-b+1)x-b$ より

$(a-b+2)x^2-(a+b)x+(a-b)<0$ — ① となる

ここで $\frac{1}{2}<x<1$ が解である2次不等式のひとつは

$\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)<0$ より

$x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}<0$ であり

両辺に $(a-b+2)$ をかけると

$$\begin{cases}(a-b+2)x^2-\frac{3}{2}(a-b+2)x+\frac{1}{2}(a-b+2)<0 & (a+b-2>0\text{ のとき})\\ (a-b+2)x^2-\frac{3}{2}(a-b+2)x+\frac{1}{2}(a-b+2)>0 & (a+b-2<0\text{ のとき})\end{cases} \quad \text{— ②}$$

となるが

①と②が一致するのは $a-b+2>0$ のときのみである

このとき
$$\begin{cases}-(a+b)=-\frac{3}{2}(a-b+2) & \text{— ③}\\ a-b=\frac{1}{2}(a-b+2) & \text{— ④}\end{cases}$$
がともになりたてばよいから

③より $2a+2b=3a-3b+6$

よって $a=5b-6$ —③'

④より $2a-2b=a-b+2$ であり

$a-b=2$

③'を代入して $5b-6-b=2$ より $b=2$

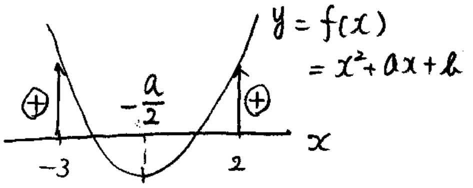
③'より $a=10-6=4$ となり

このとき $a+b-2>0$ をみたす

以上のことから、求める a, b の値は

$\boxed{a=4,\ b=2}$ である

7.



(1) $f(x)=0$ の判別式を D とすると

題意をみたす条件は

$$\begin{cases} D>0 & \text{—①} \\ -3<-\frac{a}{2}<2 & \text{—②}\quad(\text{軸について}) \\ f(-3)>0 & \text{—③} \\ f(2)>0 & \text{—④}\quad\text{である} \end{cases}$$

①より　$a^2-4b>0$ から　$b<\frac{1}{4}a^2$　— ①′

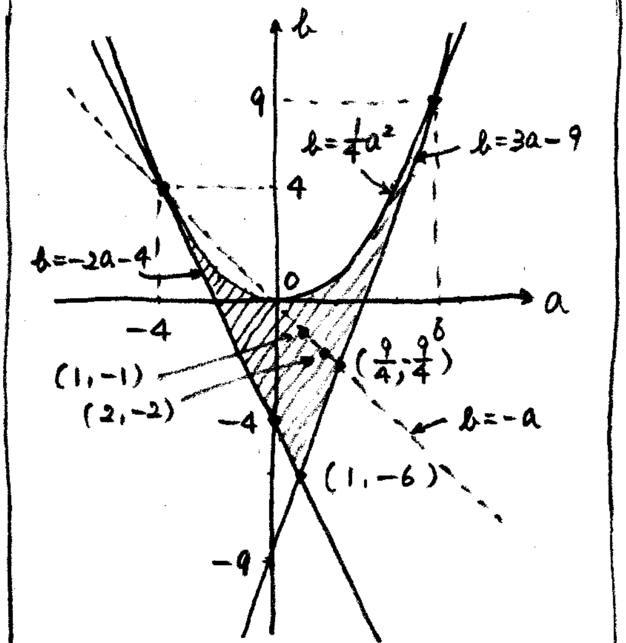
②より　$6>a>-4$　—— ②′

③より　$9-3a+b>0$ から　$b>3a-9$ — ③′

④より　$4+2a+b>0$ から　$b>-2a-4$ — ④′ となる

よって $\boxed{b<\frac{1}{4}a^2,\ b>3a-9,\ b>-2a-4 \text{ で囲まれた部分の内部が解}}$ となり

下図のようになる



(境界は含まない)

$b=\frac{1}{4}a^2$ と $b=3a-9$ を

連立にすると

$\frac{1}{4}a^2=3a-9$ より

$a^2-12a+36=0$

$(a-6)^2=0$

よって　$(a,b)=(6,9)$

$b=\frac{1}{4}a^2$ と $b=-2a-4$ を連立にすると

$\frac{1}{4}a^2=-2a-4$ より

$a^2+8a+16=0$

$(a+4)^2=0$

よって $(a,b)=(-4,4)$

$b=3a-9$ と $b=-2a-4$ を連立にすると

$5a=5$ より $a=1$

よって　$(a,b)=(1,-6)$

(2)　$f(1)=1$ より　$1+a+b=1$ から　$b=-a$ である

これを ③′ に代入すると　$-a>3a-9$ より

$4a<9$

$a<\frac{9}{4}$

また上図に $b=-a$ を重ねてかくと　$a>0$

よって　$0<a<\frac{9}{4}$ で $b=-a$ をみたす点が解だから

求める整数の組 (a,b) は

$\boxed{(a,b)=(1,-1),\ (2,-2)}$ となる

8.

[1] $a<-1$ のとき

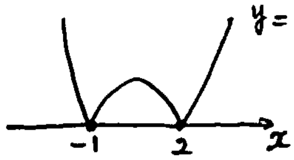
$|x^2+ax+2a|=a+1$ ―① の右辺は負、左辺は正となるので

①の実数解はない

[2] $a=-1$ のとき

①は $|x^2-x-2|=0$ より

$|(x-2)(x+1)|=0$



よって $x=2,-1$ の異なる2つの実数解をもち、題意をみたす.

[3] $a>-1$ のとき

$x^2+ax+2a=0$ ―② の判別式をDとすると

$D=a^2-8a=a(a-8)$ だから

$0\leqq a\leqq 8$ のときは $D\leqq 0$ となるので

すべての x で $x^2+ax+2a\geqq 0$ がなりたつ.

よって (i) $0\leqq a\leqq 8$ のとき.

①は $x^2+ax+2a=a+1$ となり,

$x^2+ax+a-1=0$.

この方程式が異なる2つの実数解をもてばよいから

この判別式を D_1 とすると $D_1>0$ より

$D_1=a^2-4(a-1)>0$

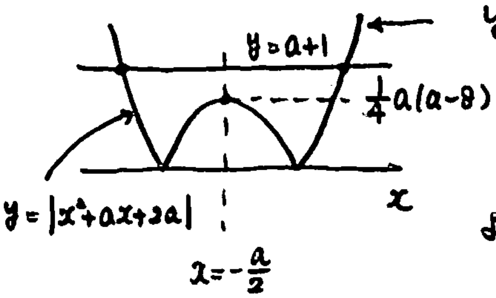
$a^2-4a+4>0$

$(a-2)^2>0$

$0\leqq a\leqq 8$ を考えて 題意をみたす a は

$0\leqq a<2$, $2<a\leqq 8$ となる

(ii) $-1<a<0$, $8<a$ のとき.



$y=|x^2+ax+2a|$ は左のような形になり

$x=-\frac{a}{2}$ のとき $y=\left|\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}+2a\right|=\left|-\frac{1}{4}a(a-8)\right|$

$=\frac{1}{4}a(a-8)$ ($a<0$, $8<a$ より)

よって異なる実数解が2つのときは

$\frac{1}{4}a(a-8)<a+1$ のときだから

$a^2-8a<4a+4$ より

$a^2-12a-4<0$

$-1<a<0$, $8<a$ を考えて $6-2\sqrt{10}<a<0$, $8<a<6+2\sqrt{10}$ となる.

[1][2][3] より求める a の範囲は

$\boxed{a=-1,\ 6-2\sqrt{10}<a<2,\ 2<a<6+2\sqrt{10}}$ となる

9.

$xy=t$, $z=x^2y^2+x^2+y^2+xy$ とおくと

$$z=t^2+(x+y)^2-2xy+xy$$
$$=t^2+16-t \quad \text{—— ①}$$
$$=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\frac{64}{4}$$
$$=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{63}{4}$$

ここで $t=xy\geqq 0$ であり

$x+y=4$ より $0\leqq x\leqq 4$ で

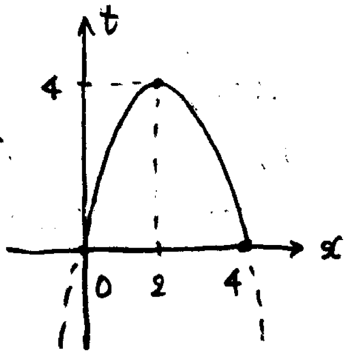
また $t=x(4-x)$

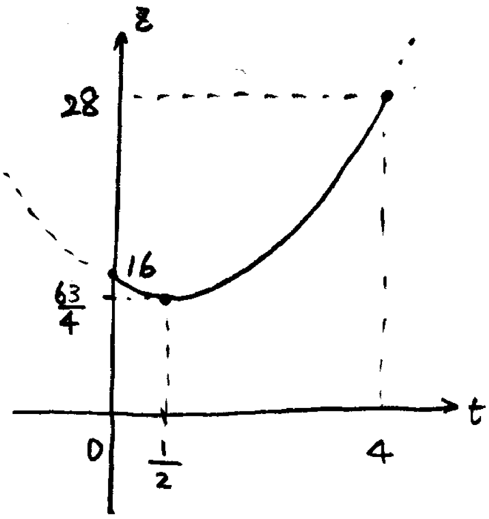
$=-x^2+4x$

$=-(x-2)^2+4$

だから

$0\leqq t\leqq 4$.





よって $z=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{63}{4}$ を $0\leqq t\leqq 4$ で考えて

$t=4$ で z は最大値となりその値は①より

$z=4^2+16-4=28$

ゆえに 最大値 28 ($x=2$, $y=2$ のとき)

最小値 $\frac{63}{4}$ となる

10.

まず三角形の成立条件をしらべると

$$\begin{cases} (x^2+x+1)+(2x+1) > x^2-1 & \text{— ①} \\ (x^2+x+1)+(x^2-1) > 2x+1 & \text{— ②} \\ (2x+1)+(x^2-1) > x^2+x+1 & \text{— ③} \end{cases}$$ である

①より　$x^2+3x+2 > x^2-1$ から

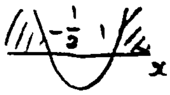
$3x > -3$

$\boxed{x > -1}$

②より　$2x^2+x > 2x+1$ から

$2x^2-x-1 > 0$

$(x-1)(2x+1) > 0$



よって　$\boxed{x < -\frac{1}{2},\ 1 < x}$

③より　$x^2+2x > x^2+x+1$ から

$\boxed{x > 1}$

①②③より $\boxed{\text{三角形の成立条件は}\ x > 1\ \text{である}}$

ここで3辺の長さをくらべると

$$(x^2+x+1)-(2x+1) = x^2-x$$
$$= x(x-1) > 0 \quad (\because x > 1)$$

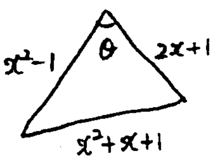
よって　$x^2+x+1 > 2x+1$

また　$(x^2+x+1)-(x^2-1) = x+2 > 0$

よって　$x^2+x+1 > x^2-1$

よって3辺のうち最大辺は x^2+x+1 であるから、その対角が最大角θであるから

余弦定理より



$$\cos\theta = \frac{(x^2-1)^2+(2x+1)^2-(x^2+x+1)^2}{2(x^2-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{\cancel{x^4}-\cancel{2x^2}+1+\cancel{4x^2}+4x+1-(\cancel{x^4}+x^2+1+2x^3+2x+\cancel{2x^2})}{2(x^2-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{-2x^3-x^2+2x+1}{2(x^2-1)(2x+1)}$$

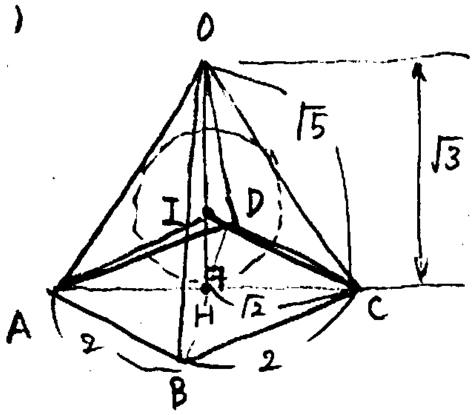
$$\cos\theta = \frac{-x^2(2x+1)+(2x+1)}{2(x^2-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{-(2x+1)(x^2-1)}{2(x^2-1)(2x+1)} = -\frac{1}{2}$$

よって　$12(1+\cos\theta) = 12\times\left(1-\frac{1}{2}\right) = \boxed{6}$

11.

(1)



ACとDBの交点をHとすると

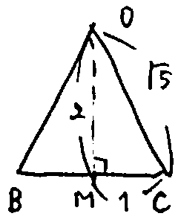
OHが求める高さとなる。対称性から

$\triangle OHC$において$\angle OHC = 90°$より

$$OH = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = \boxed{\sqrt{3}}$$

(2) 球Sの中心をI，半径をrとする。

$\triangle OBC$について BCの中点をMとすると $OM \perp BC$ より



$$OM = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = 2$$

よって $\triangle OAB = \triangle OBC = \triangle OCD = \triangle ODA = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$.

また、(四角錐OABCDの体積) = (IABCDの体積) + (IOBCの体積)×4 より

$$\frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times \sqrt{3} = \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times r + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times r \times 4$$ だから

$$\sqrt{3} = r + 2r$$

よって $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ より 球Sの半径は $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ $\left(= \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(3) $(\text{球Sの表面積}) = 4\pi r^2 = 4\pi \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \boxed{\frac{4}{3}\pi}$

$(\text{球Sの体積}) = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \times \frac{1}{3\sqrt{3}}$

$$= \boxed{\frac{4\sqrt{3}\pi}{27}}$$

12.

$x^2+y^2<9$ で $x^2 \leqq y^2$ より

$2x^2=x^2+x^2 \leqq x^2+y^2<9$ だから $x^2<\frac{9}{2}$

よって $x=0, \pm 1, \pm 2$

i) $x=0$ のとき $y^2<9$ より $y=0, \pm 1, \pm 2$

ii) $x=\pm 1$ のとき $1 \leqq y^2<8$ より $y=\pm 1, \pm 2$

iii) $x=\pm 2$ のとき $4 \leqq y^2<5$ より $y=\pm 2$

よって 求める整数の組の数は $5+2\times 4+2\times 2=17$ より

$\boxed{17\text{個}}$

13.

(1) 6人をまず2人ずつA, B, Cの部屋に入れると考えて
その後, A, B, Cの部屋の区別をなくせばよい.

まず, 6人から2人えらんでAの部屋に入れ $({}_6C_2)$
のこり4人から2人えらんでBの部屋に入れ $({}_4C_2)$
のこりをCの部屋に入れる (1通り)
ここからA, B, Cの区別 $(3!)$ をなくすから

$$\frac{{}_6C_2\times{}_4C_2\times 1}{3!}=\frac{\cancel{6}\cdot 5}{2\cdot 1}\times\frac{\cancel{4}\cdot 3}{2\cdot 1}\times\frac{1}{\cancel{3\cdot 2\times 1}}=15$$

よって $\boxed{15\text{通り}}$

(2) (1)と同じように考えると

$$S_n=\frac{1}{n!}\times{}_{14}C_2\times{}_{12}C_2\times\cdots\times{}_{(-2n+16)}C_2$$

$$=\frac{1}{n!}\times\underbrace{\frac{14\cdot 13}{2\cdot 1}\times\frac{12\cdot 11}{2\cdot 1}\times\cdots\times\frac{(16-2n)\cdot(15-2n)}{2\cdot 1}}_{n\text{回の積}}$$

$$=\frac{1}{n!}\times\frac{1}{2^n}\times\frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot\cdots\cdot(16-2n)(15-2n)\times(14-2n)!}{(14-2n)!}$$

$$=\frac{1}{2^n}\times\frac{14!}{n!\,(14-2n)!}$$

よって $\boxed{S_n=\frac{14!}{2^n\cdot n!\,(14-2n)!}}$

$(n=1, 2, 3, \cdots, 7)$

(3) $\dfrac{S_{n+1}}{S_n} = \dfrac{14!}{2^{n+1}\cdot(n+1)!\cdot\{14-2(n+1)\}!} \times \dfrac{2^{n}\cdot n!\,(14-2n)!}{14!}$

$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{(n+1)} \times \dfrac{(14-2n)\times(13-2n)\times\cancel{(12-2n)!}}{\cancel{(12-2n)!}}$

$= \dfrac{(7-n)(13-2n)}{(n+1)}$

$= \dfrac{(n-7)(2n-13)}{(n+1)}$

よって $\dfrac{S_{n+1}}{S_n} > 1$ をとくと $\dfrac{(n-7)(2n-13)}{n+1} > 1$ より

$n+1$は正であるから $(n-7)(2n-13) > n+1$

$2n^2-27n+91 > n+1$

$2n^2-28n+90 > 0$

$n^2-14n+45 > 0$

$(n-9)(n-5) > 0$

$n<5,\ 9<n$ よって $\boxed{\dfrac{S_{n+1}}{S_n} > 1 \text{ をみたす } n \text{ は } n = 1, 2, 3, 4}$

(4) (3)と同様にすると

$n=1,2,3,4$のとき $\dfrac{S_{n+1}}{S_n} > 1$ より $S_n < S_{n+1}$

$n = 5$ のとき $\dfrac{S_{n+1}}{S_n} = 1$ より $S_n = S_{n+1}$

$n = 6$ のとき $\dfrac{S_{n+1}}{S_n} < 1$ より $S_n > S_{n+1}$ がなりたつ。

よって $S_1 < S_2 < S_3 < S_4 < S_5 = S_6 > S_7$ がなりたつから

S_nを最大にするnは $\boxed{n=5,6}$

14.

(1) (i) 3回でおわるとき

赤、赤、黒 とでればよいから $\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{120}=\frac{1}{60}$

(ii) 4回でおわるとき

3回目までに 赤が2回、白が1回でて、4回目に黒が出ればよいから

$$\frac{{}_3C_2\times2\times1\times\cancel{3}^1}{6\times5\times4\times\cancel{3}_1}=\frac{6}{120}=\frac{3}{60}$$

(iii) 5回でおわるとき

4回目までに 白、赤が2回ずつ出て、5回目に黒が出ればよいから

$$\frac{{}_4C_2\times(2\times1)\times(\cancel{3\times2})}{6\times5\times4\times\cancel{3\times2}}=\frac{12}{120}=\frac{6}{60}$$

(iv) 6回でおわるとき

5回目までに 白3回、赤2回でて、6回目に黒が出ればよいから

$$\frac{{}_5C_2\times(2\times1)\times(\cancel{3\times2\times1})}{6\times5\times4\times\cancel{3\times2\times1}}=\frac{20}{120}=\frac{10}{60}$$

よって求める確率は $\frac{1}{60}+\frac{3}{60}+\frac{6}{60}+\frac{10}{60}=\frac{20}{60}=\boxed{\frac{1}{3}}$ となる

(2) (i) 2回でおわるとき

白、黒 とでればよいから $\frac{3}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{30}=\frac{6}{60}$

(ii) 3回でおわるとき

白、白、黒 とでればよいから $\frac{3}{6}\times\frac{\cancel{2}^1}{5}\times\frac{1}{\cancel{4}_2}=\frac{3}{60}$

(iii) 4回でおわるとき

① 白白白黒 の場合 $\frac{\cancel{3}}{6}\times\frac{\cancel{2}^1}{5}\times\frac{1}{\cancel{4}_2}\times\frac{1}{\cancel{3}}=\frac{1}{60}$

② 3回目までに 白2つ、赤1つでて 4回目の黒の場合

$$\frac{{}_3C_2\times(\cancel{3\times2})\times2}{\cancel{6}\times5\times4\times3}=\frac{6}{60}$$

(iv) 5回でおわるとき

4回目までに 白3つ、赤1つでて 5回目に黒の場合のみだから

$$\frac{{}_4C_3\times(\cancel{3\times2}\times1)\times\cancel{2}}{\cancel{6}\times5\times4\times3\times\cancel{2}}=\frac{4}{60}$$

(v) 6回でおわるとき

(1)の(iv)より $\frac{10}{60}$

よって求める確率は $\frac{6}{60}+\frac{3}{60}+\frac{1}{60}+\frac{6}{60}+\frac{4}{60}+\frac{10}{60}=\frac{30}{60}=\boxed{\frac{1}{2}}$ となる

No.

Date

15. (1) 3つが等差数列であればよいから

i) 3つとも同じ数のとき　　6通り

ii) 3つともちがう数のとき　(1,2,3), (2,3,4), (3,4,5), (4,5,6)
(1,3,5), (2,4,6),　の6通り

よって $6\times 3! = 36$ 通りだから 求める確率は

$$\frac{6+36}{216} = \frac{42}{216} = \boxed{\frac{7}{36}}$$

(2) i) 3コとも 3または4 の確率は　$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \boxed{\frac{1}{27}}$

ii) 2コが3または4 の確率は　${}_3C_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right) = \boxed{\frac{6}{27}}$

iii) 1コが3または4の確率は
1コが 1・2
1コが 5・6

$\left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 3! = \boxed{\frac{6}{27}}$

よって求める確率は $\boxed{\frac{13}{27}}$