

Q. (合格る計算 数学 1A2B ITEM6 不定方程式 P27 類題 6(8))

因数分解までわかりますが、なぜ  $x-y-1 \geq 0$  なるのかがわかりません。

因数分解以降の解説をお願いします。

A.

整数解を持つ不定方程式では整数という条件を利用し、解の範囲を絞ることが重要となります。

本問の式を因数分解すると

$$(x - y - 1)(x - 3y) = 12$$

となりますが、(整数) $\times$ (整数) $=12$ を満たす整数の組み合わせは  $1 \times 12$ 、 $2 \times 6$ 、 $3 \times 4$ 、 $(-1) \times (-12)$ 、 $(-2) \times (-6)$ 、 $(-3) \times (-4)$ 、6通りあり、左右を入れ替えたものも含めれば12通りも存在します。これらについて全て調べるのは面倒なので、 $x, y$ の満たす条件を利用して考えられる整数の組み合わせを絞り、効率良く解答することを考えます。

解を絞る方法としては

- ・ 因数の取りうる範囲を調べる
- ・ 因数同士の大小関係を調べる
- ・ 因数の偶奇を調べる

などがあります。

(i)

まず、 $x - y - 1$ の取りうる範囲を考えます。

所与条件は $x > y$ であり、 $x, y$ ともに整数であるということは、 $x - y$ は1以上の値しか取り得ません。したがって

$x - y \geq 1$ となります。これより、 $x - y - 1 \geq 0$ と言えます。

(ii)

次に $x - y - 1$ と $x - 3y$ の大小関係を調べます。両者の差をとると

$(x - y - 1) - (x - 3y) = 2y - 1$ となります。ここで、所与条件 $y > 0$ と $y$ が整数であることから $y \geq 1$ なので、

$2y - 1 \geq 2 \cdot 1 - 1 = 1 > 0$ となります。

したがって $x - y - 1 > x - 3y$

(iii)

さらに、 $x - y - 1$ と $x - 3y$ の差 $2y - 1$ は奇数なので、 $x - y - 1$ と $x - 3y$ の偶奇は必ず異なります。

これらの条件を全て満たす $x - y - 1$ と $x - 3y$ の組み合わせは

$(x - y - 1, x - 3y) = (12, 4), (1, 3)$ の2通りだけとなり、楽に解くことができます。