

Q.(数学1A基礎問題精講 演習25(3) P47)

aの場合分けの仕方がわかりません。

A.

$a < 2 < b$ を満たす a, b について、 $a \leq x \leq b$ の範囲で関数の値域、つまり y の最大値と最小値を求めます。

本問のような特殊な関数の最大、最小を考えると、関数がどの場所で最大値、最小値をとりうるかを、グラフを見ながら考えることが重要です。

まず最大値について、 $a \leq x \leq b$ の範囲では必ず $x=2$ を含みます。なぜなら a は2より小さく、 b は2より大きいという条件があるためです。したがってグラフの形より、最大値は $y=3$ ($x=2$ のとき)ですから、値域は $\bullet \leq y \leq 3$ となります。問題の条件 $2-a \leq y \leq b$ と比較すると $b=3$ と決定できます。

次に $a \leq x \leq 3$ の範囲での最小値を考えます。このグラフは2つの線分($x < 2$ の部分と $x \geq 2$ の部分)から成り立っており、最小値は x の範囲の両端、つまり $x=a$ のときか $x=3$ のときであると考えられます。

グラフを見ると $x=3$ のとき、 $y=2$ ですが、 $y=2$ となる場所は他にも $x=1$ があります。

$x=1$ より左側では y は2より小さく、 $x=1$ より右側では y は2より大きくなります。

これより y の最小値を考えるときは、 x の範囲の左端 $x=a$ の値による場合分け、つまり $a < 1$ である

か $1 \leq a < 2$ であるかの2通りで場合分けが生じます(なお $a \leq 1$ と $1 < a < 2$ のように等号を別の方につけて場合分けしても構いません)。

