

Q.(数学 2B 標準問題精講 P211 92(3))

解答では、1→2行目で $-x^2f(a) + x^2f(a)$ をしていますが、これを $-a^2f(a) + a^2f(a)$ とするのは駄目でしょうか。

A.

解答の1行目の式の分子に $-a^2f(a) + a^2f(a)$ を実際に加えると

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2f(x) - a^2f(a) - a^2f(a) + a^2f(a)}{x^2 - a^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2f(x) - a^2f(a)}{x^2 - a^2}$$

となり、元の式に戻ってしまうため、極限值を求められません。

微分の定義を用いて極限值を求めるときのポイントは、式に $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ の形を作ることです。

解答1行目の式に $-a^2f(a)$ があるので、ここに $a^2f(x)$ を付け足すと $a^2\{f(x) - f(a)\}$ とできるので $a^2f(x) - a^2f(x)$ を足すという別解が考えられます。

すると、

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2f(x) - a^2f(a) + a^2f(x) - a^2f(x)}{x^2 - a^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2 - a^2)f(x) + a^2\{f(x) - f(a)\}}{x^2 - a^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{(x^2 - a^2)f(x)}{x^2 - a^2} + \frac{a^2\{f(x) - f(a)\}}{x^2 - a^2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left\{ f(x) + \frac{a^2}{x+a} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right\}$$

と変形することで極限值を求められます。