

Q. (基礎問題精講数学1A 例題97(1) P162)

解説の補助をお願いします。

A.

絶対値記号やガウス記号などの特殊な記号を含む関数、方程式では、まず記号を外すことから始まります。外してしまえば普通の方程式のように扱うことができるためです。

ガウス記号の場合、(1)にあるガウス記号の満たす不等式

$$x-1 < [x] \leq x$$

を利用してガウス記号を外し、不等式を作ります。

各辺を9倍すると

$$9(x-1) < 9[x] \leq 9x$$

そして第2辺が①式の右辺に等しいので、ここに①式($9[x] = x^2 + 18$)を代入すると

$$9(x-1) < x^2 + 18 \leq 9x$$

これにより、ガウス記号が外れた状態になります。

上のような(第1辺)<(第2辺)<(第3辺)の不等式を解くとき、(第1辺)<(第2辺)と、(第2辺)<(第3辺)の2つに分けて考えます。

$$(\text{第1辺}) < (\text{第2辺}) \Leftrightarrow 9(x-1) < x^2 + 18$$

$$(\text{第2辺}) < (\text{第3辺}) \Leftrightarrow x^2 + 18 \leq 9x$$

これを变形するとそれぞれ

$$x^2 - 9x + 27 > 0 \quad \text{---②式}$$

$$x^2 - 9x + 18 \leq 0 \quad \text{---③式}$$

になります。この不等式を解き、②、③式を同時に満たす x の範囲を考えます。

②式を平方完成させると $(x - \frac{9}{2})^2 + \frac{27}{4} > 0$ となり、どんな x でも②式を満たします。

③式を因数分解すると $(x-3)(x-6) \leq 0$ となり、 $3 \leq x \leq 6$ となります。

以上より、②、③式を同時に満たす x の範囲は $3 \leq x \leq 6$ となります。方程式①の解はこの範囲に含まれており、(2)では(1)で絞れた範囲の中から解を求めています。