

Q. (基礎問題精講 数学 I A 例題 18(参考) P33)

参考の数直線の意味がわかりません。

A.

絶対値とは、数直線上において 0 からの距離を表したものです。例えば $|x|$ は 0 から x までの距離を表しています。また、数直線上の任意の 2 点間の距離を知りたい時には、その 2 点の値の差を求めることで求められるので、例えば x と y の距離は $|x-y|$ または $|y-x|$ と表せます。

本問の方程式 $|x+1|+|x-1|=4$ の数直線上での意味を考えます。

$|x+1|$ は $|x-(-1)|$ と書き換えられるので、 x と -1 の距離と読み換えることができます。

また、 $|x-1|$ は x と 1 の距離と読み換えられます。

以上より、方程式は「数直線上において、 -1 からの距離と 1 からの距離を足すと 4 になる点を求める」と解釈することができます。そこで数直線を用い、この問題を視覚的に捉えます。

求める点を P とし、 -1 の点を A 、 1 の点を B とします。

問題で求めた通り、 $x=-2, 2$ のとき、 $AP+BP=4$ となります。これ以外に解が無いか、つまり $AP+BP=4$ となる点が他に無いか調べます。

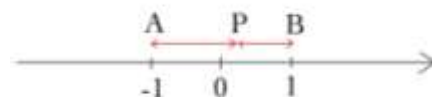
まず P の位置によって次のように場合分けをします。

(i) P が A と B の間にあるとき

(ii) P が A より左側にあるとき

(iii) P が B より右側にあるとき

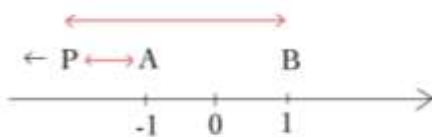
(i) を満たすのは $-1 \leq x \leq 1$ にあるときです。



右図のように $AP+BP$ は常に $AP+PB=2$ となります。

(ii) を満たすのは、 $x < -1$ にあるときです。

P を左側(マイナス側)に少しずらすと AP の値も、 BP の値も大きくなります。したがって x を小さくすると、それに伴って $AP+BP$ は大きくなります。



(iii) を満たすのは、 $1 < x$ にあるときです。

(ii) と同様に、 P を右側(プラス側)に少しずらすと AP の値も、 BP の値も大きくなります。したがって x を大きくすると、それに伴って $AP+BP$ も大きくなります。

以上のことをまとめ、 x と $AP+BP$ の関係を大まかにグラフ化すると右のようになります。

このグラフから、 $AP+BP=4$ となる x は 2 と -2 以外に無いことが分かります。

