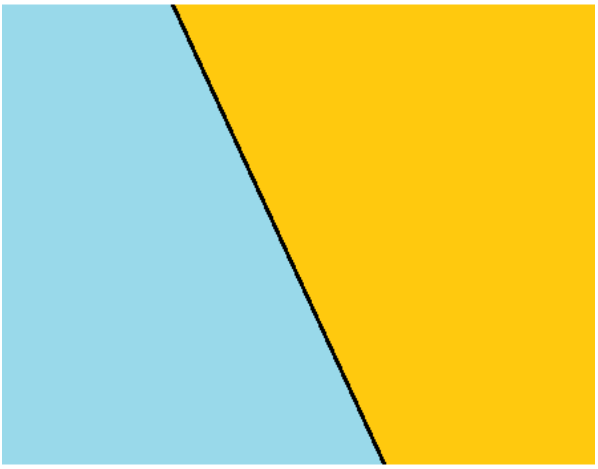
Q．（数学基礎問題精講 2B 例題 133(3)　 P206）
解説の意味がよく分かりません。

A．
領域がどのようにして生まれるか、実験してみます。
まず、直線が無い状態では領域が 1 つあります。

直線を 1 本引くと、1 つだった領域は分断されて 2 つとなります。したがって、n本直線を引いたときの領域の数をa_nとすると、a_1は

$$a_1 = 2$$

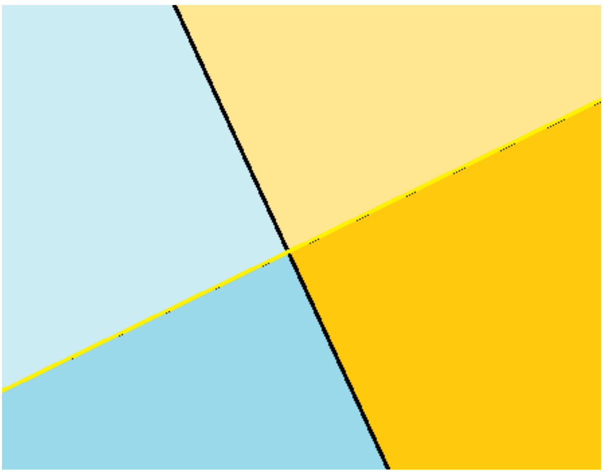
です。



次に 2 本目の直線(黄色い直線)を引くと、水色とオレンジ色の 2 つの領域がそれぞれ 2 つに分断されるため、**a_1より 2 つ増えて**、4 つとなります。

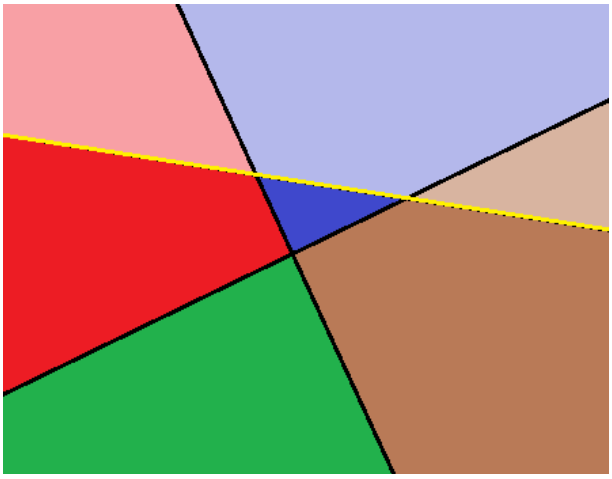
$$a_2 = a_1 + 2 = 4$$

※これ以降は新しく引く直線を黄色い直線、すでに引いた直線を黒い直線群とします。



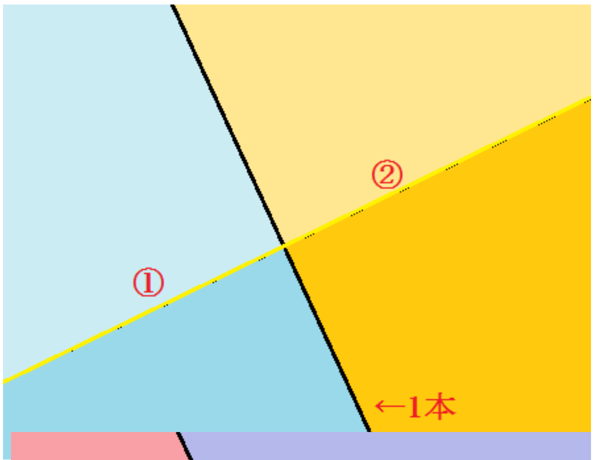
続けて 3 本目の直線(黄色い直線)を引くと、赤色、青色、茶色の 3 つの領域がそれぞれ 2 つに分断されるため、$\boldsymbol{a_2}$ **より 3 つ増えて**、7 つとなります。

$$a_3 = a_2 + 3 = 7$$

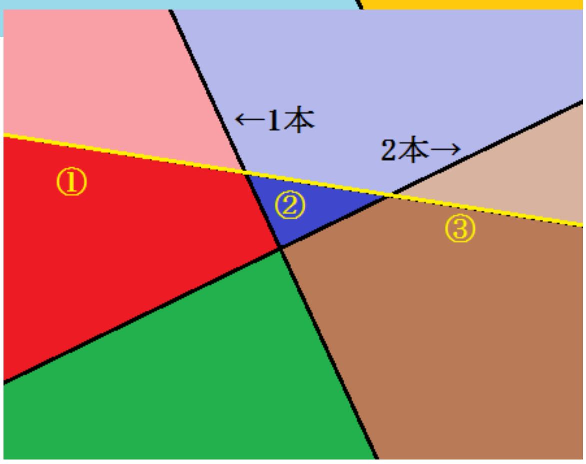


上の図の例でいえば、3 本目の(黄色い)直線が、赤色の領域、青色の領域、茶色の領域、合計 3 つの領域を通過しているために、3 つの新たな領域(上側の 3 か所)が生まれています。つまり**黄色い直線が通過した領域の数だけ、新たな領域が生まれる(A)**ことが分かります。

黒い直線は領域の境界を成しているので、**黄色い直線が 1 本の黒い直線と交点を持つということは、黄色い直線が 2 つの領域を通過する**ということです。

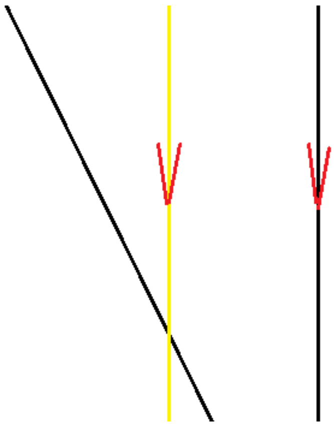


同様に黄色い直線が 2 本の黒い直線と 1 点ずつ交点を持てば、黄色い直線は 3 つの領域を通過することになります。
つまり**黄色い直線によって新しく生まれる領域の数は、黄色い直線が黒い直線群と持つ交点の合計より 1 多い(B)**ということが分かります。

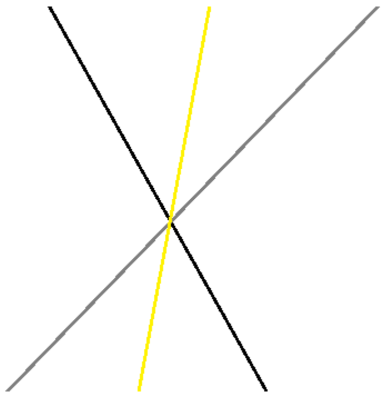


次に黄色い直線と黒い直線群の交点の数について考えます。

もし平行な関係があると、平行な関係の直線とは交点を持ちません。
つまり
(黄色い直線と黒い直線群の交点の数)が
(黒い直線群の本数)より少なくなります。
右の例では
(黄色い直線と黒い直線群の交点の数)=1
(黒い直線群の本数)=2
です。



また、もし直線 3 本が 1 点で交わる場所があると、その点では交点が重複します。この場合も(黄色い直線と黒い直線群の交点の数)が(黒い直線群の本数)より少なくなります。
右の例では
(黄色い直線と黒い直線群の交点の数)=1
(黒い直線群の本数)=2
です。



平行ではなく、しかも 3 本が 1 点で交わらないということは、黄色い直線を引くと、黄色い直線は全ての黒い直線に対して 1 つずつ交点を持ちます。つまり
(黄色い直線と黒い直線群の交点の数)が(黒い直線群の本数)と等しくなります(C)。
これまでのことをまとめると

$(新しく生まれる領域の数) = (黄色い直線が通過した領域の数)$ ←(A) $= (黄色い直線が黒い直線群と持つ交点の数) + 1$ ←(B) $= (黒い直線群の本数) + 1$ ←(C)

となります。

このことを踏まえて、漸化式を立てます。漸化式はn回後と$(n+1)$回後の関係を求めるので、**n本の直線が引いてあるときに$(n+1)$本目の直線(黄色い直線)を引くことを考えます。**
n本の直線を引いた時点でa_n個の領域があります。$(n+1)$本目の直線(黄色い直線)を引くと、このとき黒い直線群はn本あるので、新たに$(n+1)$個の領域が生まれます。これ

を式で表すと、

$$a_{n+1} = a_n + n + 1$$

これを解くことでa_nの値を求めます。この漸化式は階差数列の形となっています。

したがって$n \geqq 2$のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$$

ここで、Σの計算を具体的に書き出してみると、

$$a_n = a_1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + (n-1) + n$$

ここで、$a_1 = 2$でしたので、

$$a_n = 2 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + (n-1) + n$$

最初の項の 2 を 1+1 と分けると

$$a_n = 1 + \underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + (n-1) + n}$$

$$a_n = 1 \quad + \quad \frac{n(n+1)}{2} \quad \leftarrow (1\text{ から}n\text{までの和})$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

$n = 1$のとき、$a_1 = \frac{1 \times 2}{2} + 1 = 2$なので、$n = 1$のときも成立します。

従って、$a_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$

となります。

漸化式を立てるためには、ある操作の**n回後から$(n+1)$回後への変化を調べる**必要があるので、まずは**具体的な回数で実験をしてみて、法則性を見つける**ことが大切です。