Q.（基礎問題精講 1A　例題 23(3)　P42）
背理法の証明について、√2 を n／m と表して、√2m＝n になるところまで解答を読んで理解できたのですが、その後 2 乗して n が偶数になるとは限らないのではないでしょうか？

A.
①$\sqrt{2}=\frac{n}{m}$(m,nは互いに素)と表せる
と仮定した場合の論理展開を分解すると、
↓
②$\sqrt{2}m=n$
↓
③$2m^2=n^2$
↓
④n^2は偶数である
↓
⑤nは偶数である
↓
⑥n^2は 4 の倍数である
↓
⑦左辺も 4 の倍数でなければならない
↓
⑧mは偶数である

となります。
ここで①(m,nは互いに素)と⑧(m,nはいずれも偶数)に矛盾が生じます。しかし、①→⑧の論理展開には、数学的にどこにも誤りはありません。矛盾が生じた原因は、そもそも①を正しいと仮定したところにあります。したがって①が誤りであると言えます。これが背理法を用いた証明方法です。

nが偶数であることを、背理法を用いて証明します。

もし③式から、nが奇数だと仮定してみましょう。すると、$n=2k-1$(kは自然数)と表せます。これを③式に代入すると
$2m^2=(2k-1)^2$
$\Leftrightarrow 2m^2=4k^2-4k+1$
ここで両辺の偶奇を確かめるために、右辺を 2 でくくると
$\Leftrightarrow 2m^2=2(2k^2-2k)+1$
となります。$2k^2-2k$は自然数ですから、右辺は奇数です。ところが左辺は偶数ですから矛盾が生じます。
従ってnを奇数だと仮定したことが誤りなので、nが偶数であることが示せます。

無理数証明は背理法を用いた基本的な証明の1つなので、証明の流れを確実に理解できるようにしておきましょう。