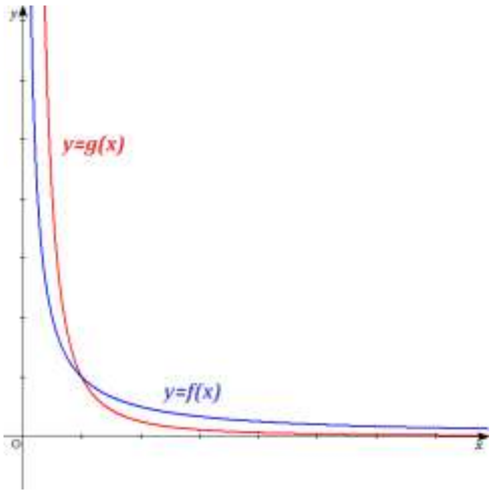
Q．（数学標準問題精講Ⅲ 標問 58(研究) p139）
研究の下から 4 行目あたりから何をしているのかが分かりませんでした。

A.
本題に入る前に、収束の速さについて説明します。
例えば$f(x)=\frac{1}{x}$と$g(x)=\frac{1}{x^2}$という 2 つの関数を考えます。これらは$x\to\infty$のとき、いずれも 0 に収束します。しかし、両者の 0 への近さを比べると

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\frac{x^2}{x}=x\to\infty$$

となり、**相対的に$f(x)$の方が$g(x)$よりも 0 に近づく速さが遅い**ということが分かります。
右のグラフで比べても、xが大きくなると$f(x)$よりも$g(x)$の方が先に 0 に近づいていることが視覚的に分かります。



さて、この研究ではa_nの収束の速さを調べるために、**a_nと同じ程度の速さで収束する関数を調べています。**

$$①\Leftrightarrow na_na_{n-1}=\frac{\pi}{2}$$

$$③\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1$$

この 2 式をかけると

$$\lim_{n\to\infty}(na_na_{n-1})\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{\pi}{2}\cdot 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}na_n^2=\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot a_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$はほぼ 1 に近いと見なせるので、a_nと$\frac{1}{\sqrt{n}}$は$n\to\infty$のときほぼ同じ速さで 0 に近づくということを表しています。

nを横軸にとり(便宜上nは実数とします)、$y=\frac{1}{\sqrt{n}}$と$y=a_n$の 2 つのグラフを描いてみると、確かに両者とも同程度に 0 に近づいていることが分かります。

※厳密には$\frac{1}{\sqrt{n}}$の方がa_nより$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$倍近づくのが速いです。