Q.（標準問題精講2B　標問135(1)の研究 p.304）
7行目からの式が、なぜそうなるのか分かりませんでした。

A.
【研究】では縦切りで格子点を考えていますが、直線ABの傾きが$\frac{5}{3}$のためxが3の倍数のときは直線上に格子点が乗り、3の倍数でないとき直線上には格子点が来ないことより、xを3の剰余類で場合分けします。
まず、Σの変数kの変域についてですが、
x=3k,x=3k−1,x=3k−2で場合分けしているので、kが1からmまで動けば
x=3k　←x=3,6,…,3m
x=3k−1　←x=2,5,…,3m−1
x=3k−2　←x=1,4,…,3m−2
となり、3つ場合分けを合わせてx=1,2,…,3m−1,3mがすべてカバーされます。
よって、

$\Sigma_{k=1}^{m}\{x=3k$**のときの格子点の個数**$\}+\Sigma_{k=1}^{m}\{x=3k-1$**のときの格子点の個数**$\}$
$+\Sigma_{k=1}^{m}\{x=3k-2$**のときの格子点の個数**$\}$
$=\Sigma_{k=1}^{m}\{5(m-k)+1\}+\Sigma_{k=1}^{m}\{5(m-k)+2\}+\Sigma_{k=1}^{m}\{5(m-k)+4\}$

という式がまず出てきます。この式でx=1~3mのときをカバーしているので、ここにx=0のときの格子点の個数5m+1を加えて、全体では

$(5m+1)+\Sigma_{k=1}^{m}\{5(m-k)+1\}+\Sigma_{k=1}^{m}\{5(m-k)+2\}+\Sigma_{k=1}^{m}\{5(m-k)+4\}$

という式になります。
ここからの式変形は、次のようになります。（解答と一部違う方法です）

$(5m+1)+\Sigma_{k=1}^{m}\{5(m-k)+1+5(m-k)+2+5(m-k)+4\}$
$=(5m+1)+\Sigma_{k=1}^{m}\{15(m-k)+7\}$
$=(5m+1)+7m+15m^2-15\Sigma_{k=1}^{m}k$
$=(5m+1)+7m+15m^2-15\frac{m(m+1)}{2}$
$=\frac{15m^2+9m+2}{2}$

xが0から3mまで動くことを考えなければいけないのですが、場合分けの都合上1~3mのときと0のときを分けて考え、それらを足すという方法で求めました。