Q.（標準問題精講ⅡB　標問26研究　p.63）
研究の部分が分からなかったため詳しい解説をお願いします。

A.

[1] **対称式の定義　文字を入れ替えても変わらない式**

例 $f(x,\ y)=x^3+xy+y^3$ において，$x\to y,\ y\to x$ とする．
このとき　$f(y,\ x)=y^3+yx+x^3=f(x,\ y)$

また、基本対称式とはx+y　，　xyの2つの式のことを指します。
3次式の場合はx+y+z，xyz，xy+yz+zx の3つの式です。

この【研究】で示したいのは、「どんな対称式でも基本対称式x+yとxyを使って表すことができる」ということです。例えば上の例の対称式では、
$f(x,y)=x^3+xy+y^3=(x+y)\{(x+y)^2-3xy\}+xy$
となります。これをすべての対称式について示していきます。

対称式f(x,y)のどこかに項ax^my^n　を含んでいる場合、xとyを入れ替えても等しいという対称式の性質より、この項とxとyを入れ替えたax^ny^m も項に含まれている必要があります。
$f(x,y)=\cdots+ax^my^n+\cdots+ax^ny^m+\cdots$
よって、これらの2つの項をまとめると
$f(x,y)=\cdots+a(x^my^n+x^ny^m)+\cdots$
となります。
すべての項について、このようにペアとなる項があるはずなので、対称式f(x)は
$f(x,y)=\cdots\bullet(x^{\blacktriangledown}y^{\triangle}+x^{\triangle}y^{\blacktriangledown})+a(x^my^n+x^ny^m)+\triangle(x^{\square}y^{\blacksquare}+x^{\blacksquare}y^{\square})\cdots$
と書き換えることができます。
ここまでくれば、()の中身であるの部分が基本対称式で表されることを示せば、全体も基本対称式で表せると言えます。ここからは数学的帰納法を使います。

この証明を書ける必要はありませんが、「すべての対称式は基本対称式で表せる」ということは必ず覚えておいてください。
この発想があると、対称式が出てきたときに単純な基本対称式を利用することができ、計算や式変形がかなり楽になります。