

Q. (基礎問題精講3 例題45(2) P78)

なぜ左辺に $3-a_{n+1}$ をすると、右辺にも $3-a_n$ が出てくるとわかるのでしょうか？

また、最初になぜ $n \geq 2$ のとき、となっているのでしょうか？

A.

(2)で最終的に示すべき式が、 $3-a_n \leq (\frac{1}{3})^{n-1}(3-a_1)$ と分かっており、

ここに $3-a_n$ の形が出てくることから、まず $3-a_n$ を作ってみようという発想になります。

ここで、勘が良ければいきなり $3-a_{n+1}$ を作るという発想ができますが、まずは、 $3-a_n$ を作ってみると、解答と同様の作業をして右辺に $3-a_{n-1}$ が出てくることになります。

また、右辺に $3-a_n$ (左辺 $3-a_n$ の場合は $3-a_{n-1}$)が出てくることについてですが、

これも $3-a_n \leq (\frac{1}{3})^{n-1}(3-a_1)$ の式を見て気付きたいところです。

$3-a_n \leq (\frac{1}{3})^{n-1}(3-a_1)$ を見て、 $c_n = 3-a_n$ とおけば、等比数列型 $c_n = (\text{公比})^{n-1}c_1$ であることから、まず $c_n = \text{公比} \times c_{n-1}$ または $c_{n+1} = \text{公比} \times c_n$ の式を立てて、一般項 $c_n = (\text{公比})^{n-1}c_1$ まで持ち込もうという発想になります。

そのため、まず左辺に $3-a_{n+1}$ (または $3-a_n$)を作れば、右辺に次数を一つ下げた $3-a_n$ (または $3-a_{n-1}$)が出てくるだろうと推測できるのです。

最後に、「 $n \geq 2$ のとき」と条件を設定している理由についてですが、

$$3-a_n < \frac{1}{3}(3-a_{n-1}) \cdots \textcircled{1}$$

$$3-a_{n-1} < \frac{1}{3}(3-a_{n-2}) \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{合わせて、} 3-a_n < \frac{1}{3}(3-a_{n-1}) < (\frac{1}{3})^2(3-a_{n-2})$$

このような作業を繰り返すことでp.79 2行目の式を示していくイメージなので、最低でも2回以上は①②のような不等式を作りたいので、 n を2以上にしたほうが説明として都合が良いからだと思います。

また、この作業からだとくしか示せないのですが、(2)では=つきの \leq で式を示さなければなりません。そのため、等号成立条件である $n=1$ のときを別に扱った方がわかりやすいという意味もあります。

本問のように、等比数列型に持ち込んで不等式を示す問題は多いので、示すべき式中に

$()^{n-1}$ のような型が出てきたら、今回のような作業をするのではないかと推測してみるといいとおもいます。