

Q. (基礎問題精講3 演習50)

大まかな解法の道筋は掴めたのですが、途中の計算過程(解答の8行目)が理解できません。

A.

極限をとったときに、範囲が $\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}$ だと計算しにくいので $\theta - \frac{\pi}{3} = t$ とおくことで、範囲を $t \rightarrow 0$ にして計算しやすくします。

$$\frac{2\cos\theta - 1}{\theta - \frac{\pi}{3}} = \frac{2\cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) - 1}{t}$$

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\theta \cos\frac{\pi}{3} - \sin\theta \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \text{ より、}$$

$$\frac{2\cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) - 1}{t} = \frac{(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta) - 1}{t} = \frac{-1 + \cos\theta}{t} - \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{t}$$

$$t \rightarrow 0 \text{ で極限をとったとき、} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos\theta - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{1 - \cos\theta}{t^2} \times t = 0 \text{ (例題(2))}$$

と同じ形で $\frac{1}{2} \times 0$ になるため)となります。

よって、 $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{-1 + \cos\theta}{t} - \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{t} \right) = -\sqrt{3}$ となって、解答のようになります。