

# 数学III 基礎問題精講 解説

P51 | 演習問題30

## ポイント

- ① 「 $z$ はどんな図形を描くか」は「 $z=x+yi$ とおき、 $x$ と $y$ の関係を求めよ」と同義
- ②  $|a|=|b|$  は  $|a|^2=|b|^2$  として式変形していく
- ③ 複素数は、 $|a|^2=a\cdot\bar{a}$  を利用する

## 解説

ポイント①, ②, ③さえ頭に入っていたら、この問題はカンタンです。

まず、式変形してしましましょう。

$$\left| \frac{z-i}{z-1} \right| = 2$$

$$|z-i| = 2|z-1|$$

ポイント①から、 $z=x+yi$ を代入して、

$$|x+yi-i| = 2|x+yi-1|$$

⇔

$$|x+(y-1)i| = 2|(x-1)+yi|$$

そして、ポイント②から、両辺を2乗します。

$$|x+(y-1)i|^2 = 4|(x-1)+yi|^2$$

ポイント③から、 $|a|^2=a\cdot\bar{a}$  を利用して、左辺は、

$$|x+(y-1)i|^2$$

$$= \{x+(y-1)i\} \cdot \overline{x+(y-1)i}$$

$$= \{x+(y-1)i\} \cdot \{x-(y-1)i\}$$

$$= x^2 + (y-1)^2$$

右辺は、

$$\begin{aligned}
& 4|(x-1)+yi|^2 \\
&= 4\{(x-1)+yi\} \cdot \overline{\{(x-1)+yi\}} \\
&= 4\{(x-1)+yi\} \cdot \{(x-1)-yi\} \\
&= 4\{(x-1)^2+y^2\}
\end{aligned}$$

となります。よって、「左辺=右辺」に代入して

$$\begin{aligned}
&= 4(x-1)^2+4y^2 \\
&x^2+(y-1)^2=4(x-1)^2+4y^2
\end{aligned}$$

⇔

$$x^2+y^2-2y+1=4x^2-8x+4+4y^2$$

⇔

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2$$

となります。

\*\*\*

上記の解き方がベースとなりますが、解答のように解くとよりスムーズにも解けるので、どちら  
もできるようになっておくとよいでしょう。