

Q. (数学 IIB 基礎問題精講 例題 75、演習 75)

精講の公式の解説では左端の不等号は「 $\leq$ 」となっているのに、問題の解答では「 $<$ 」となっているのはなぜですか？

A. 左端の不等号が、 $<$ か $\leq$ かというのはここでは大きな問題ではありません。  
ちなみに、「 $\leq$ 」の方が範囲が狭く「 $<$ 」よりも厳しい条件になっています。  
そのため、 $n-1 \leq \log_{10} A < n \Rightarrow n-1 < \log_{10} A < n$  という関係性になっています。  
なので、公式で $n-1 \leq \log_{10} A < n$ と与えられていれば、必要条件なので $n-1 < \log_{10} A < n$ と書いても理論上問題はありません。

ここで気を付けなければいけないのは、等号が付く可能性があるのは左端の条件だけだということです。右端には=をつけてはいけません。

$$n-1 \leq \log_{10} A \Leftrightarrow 10^{n-1} \leq A$$

$$\log_{10} A < n \Leftrightarrow A < 10^n$$

$$100000 \dots 0 (\leftarrow n \text{桁}) = 10^{n-1} \leq A < 10^n = 100000 \dots 0 (\leftarrow n+1 \text{桁})$$

という理論です。

ちなみに、 $n$ 桁の  $100000 \dots 0$  は  $n$ 桁の整数の中で最も小さい整数です。よって、それと同じかそれより大きい整数である  $A$  は  $n$ 桁であるといえます。

同じように、 $n+1$ 桁の  $100000 \dots 0$  は  $n+1$ 桁の整数の中で最も小さい整数です。

※一つ前は  $99999 \dots 9$  で  $n$ 桁

よって、 $100000 \dots 0$  よりも小さい整数  $A$  は  $n$ 桁であるといえるのです。右端の  $<$  に等号が入ってしまうと、等号が成立するとき  $A = 100000 \dots 0$  で  $A$  が  $n+1$ 桁になってしまうので条件として不適切です。

以上の理由より、「左端の不等号には=を付けても付けなくてもよい、右端の不等号には=をつけてはいけない」といえます。